R

Math. L.
224 5.

R

Geometrische Wissenschaftslehre.

Eine Anleitung

zum

leichten und gründlichen Studium der Geometrie.

Von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

königl. baier. Schulrathe, Director des Lyceums zu Aschaffenburg, Professor der Logik, Mathematik und Physik, auch Professor an dem Forstinstitute u. s. w.

Mit sechs Steintafeln.

Zweyte, verbesserte und vermehrte, Auflage.

Mainz, 1819,

bey Florian Kupferberg.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorbericht
zur ersten Auflage.

Meine im vorigen Jahre erschienene geometrische Anschauungslehre (Mainz, bey Florian Kupferberg, 166 S. 8., mit 7 Steintafeln) hat das Glück gehabt, bey Sachverständigen (worunter ich z. B. den verdienstvollen Kreisschulrath von Stephani in Ansbach und den scharfsinnigen Professor Ladomus in Carlsruhe nenne) vielen Beyfall zu finden. Auch haben andere geprüfte Männer, welche sich derselben bey ihrem öffentlichen und privat Unterrichte bedienten, ihre Brauchbarkeit zur Erweckung und Schärfung des Anschauungsvermögens und zur Verstandesbildung der Jugend anerkannt.

Solche schmeichelhafte Beweise für den Nuzzen dieser Lehrmethode ermunterten mich zur schnellern Ausarbeitung der in dem Schlußworte der Anschauungslehre erwähnten Elementargeometrie, welche ich dem gelehrten Publicum, unter dem Titel einer geometrischen Wissenschaftslehre, hierdurch übergebe.

Sie zerfällt in vier Cursus, welche: reine Elementargeometrie, rechnende Elementargeometrie, practische Elementargeometrie und Elementar-Trigonometrie heißen. Ihr näherer Inhalt ergiebt sich aus der unten folgenden Uebersicht des Werks.

Mein Zweck war, auf wenigen Bogen eine größere Summe geometrischer Wahrheiten vorzutragen, als es, nach dem sonst gewöhnlichen Plane, auch in größern Lehrbüchern zu geschehen pflegt. Kenner werden dies leicht finden, und nach meiner Ueberzeugung soll eben diese Kürze zum Vortheile der Anfänger gereichen.

Wer nur die vier Rechnungsarten in ganzen und gebrochenen Zahlen wohl inne hat, ist

zum zweckmäßigen Studium aller vier Cursus geschickt. Denn die, zum Verständnisse einiger Abtheilungen der Geometrie, nothwendigen arithmetischen Hülfslehren sind gehörigen Ortes eingeschalten worden. Daher können schon Knaben von 8 — 10 Jahren diesem Unterrichte mit Nutzen folgen. Den Erwachsenen aber wird die Schrift bey ernstem Willen auch als Anleitung zum Selbststudium dienen. Eben darin besteht der unschätzbare Werth geometrischer Wahrheit, daß sie in Schülern jedes Lebensalters lebendiges Interesse erregt.

Jene, welche durch das Studium der geometrischen Anschauungslehre zur eigentlichen Geometrie vorbereitet sind, werden der Schrift mit Leichtigkeit und Sicherheit folgen. Unvorbereiteten kann sie wohl auch zum Leitfaden dienen; doch können ihre Fortschritte nicht so schnell seyn, und der Lehrer muß ihrem ungebildeten Anschauungsvermögen oft zu Hülfe kommen.

Das Hauptziel aber, welches gegenwärtige Schrift erreichen soll, ist, daß die Geometrie auf eine ihrer würdige, rein geistige Weise,

mit Vermeidung alles Mechanischen im Lehren und Lernen, betrieben werde. Nachfolgende Einleitung wird dieses ausführlicher darlegen. In den Händen sachkundiger, thätiger Lehrer wird das Werk diesen Zweck nicht wohl verfehlen.

Aschaffenburg, im März 1816.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Vorbericht
zur zweyten Auflage.

Bey dieser zweyten Auflage meiner geometrischen Wissenschaftslehre, welche in dem kurzen Zeitraume von zwey Jahren nöthig wurde, muß ich bemerken, daß die Schrift nicht nur auf das Sorgfältigste durchsehen und verbessert, sondern auch hin und wieder bedeutend vermehrt worden ist. Eine Vergleichung derselben mit der ersten Auflage wird dieses beweisen. Auch wurden in den Steintafeln mehrere Fehler berichtigt.

Zugleich benütze ich diese Gelegenheit, jenen Schul-Vorstehern und Lehrern, welche dieses Werkchen in Ihrem Wirkungskreise als Lehrbuch eingeführt haben, hierbey meinen öffentlichen Dank zu erstatten. Durch Ihre fernere thätige Mitwirkung darf man hoffen, daß die geome-

trische Wissenschaftslehre immer mehr zur Verbreitung eines gründlichen Studiums der Elementargeometrie beytragen werde.

Noch zeige ich hier an, daß in dem Verlage gegenwärtiger Schrift baldigst eine: Stereometrische Anschauungs- und Wissenschafts-Lehre in einem Bande erscheinen wird; so, daß diese, in Verbindung mit meiner geometrischen Anschauungs- und Wissenschafts-Lehre ein Ganzes bildet, welches aus drey Bänden besteht, und die Elemente der gesammten Raumlehre umfaßt.

Aschaffenburg, im December 1818.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Einleitung.

I. Quelle der Geometrie.

Das Urpostulat der Geometrie heißt: Es giebt einen allseitig ausgedehnten, sich ins Unendliche erstreckenden Raum, an welchem man die drey Hauptrichtungen nach Länge, Breite und Tiefe erkennt. Wem die Vorstellung dieses Raumes fehlte, der müßte auf die Lehren der Geometrie Verzicht leisten. Aber sie ist allen Menschen, als etwas Gesetzmäßiges, angeboren, und so wird jeder zu den Erkenntnissen der Raumlehre fähig. Vergebens bemüht man sich, die Natur des Raumes, nach den Regeln der Logik, zu erklären. Denn was dem menschlichen Geiste ursprünglich als etwas höchst Einfaches gegeben ist, kann keine logische Analyse in einfachere Elemente zerlegen. Immer wird der Theil mit dem Ganzen, und dieses mit jenem wiederum als Einerley erscheinen. Daher drehen sich die Erklärungen: der Raum ist das Aussereinanderseyn der Dinge; oder Dasjenige, was sich nach der Länge, Breite und Tiefe erstreckt; oder Jenes, worin sich alle physische Körper befinden, und alle übrige, immer im Kreise herum.

Aber wie, könnte man fragen, ist eine strenge Wissenschaft möglich, welche in einem nicht mehr streng zu erklärenden Postulate gegründet ist? Wird sich nicht dieser Mangel einer logischen Begründung des Ursatzes auf alle abgeleitete Lehren übertragen? — Der Einwurf schwindet, wenn man erwägt, daß der Zweck logischer Erklärungen die Klarheit der zu erklärenden Begriffe ist; und da nicht mehr beabsichtiget zu werden braucht, wo das zu Erklärende schon an sich selbst mit dem höchsten Grade von Klarheit gegeben ist. Daß dies der Fall bey der Vorstellung des Raumes ist, weiß Jedermann aus eignem Selbstbewußtseyn. Und eben hierin erblicken wir die Quelle der vollkommenen Evidenz, welche den Lehren der Geometrie eigenthümlich ist, die alle andere strenge Wissenschaften, in dieser Hinsicht, weit hinter sich zurückläßt. Die Grundlehren der Logik z. B. erkennt man mit gleicher Gewißheit, als die Fundamentalsätze der Geometrie; allein es fehlt ihnen der hohe Grad von Faßlichkeit, der uns in den geometrischen Wahrheiten so erfreulich entgegentritt. Nur überzeugende Gewißheit, mit ergreifender Faßlichkeit gepaart, erzeuget die höchste Vollkommenheit menschlicher Erkenntnisse: die Evidenz.

Da nun das geometrische Denken nur eine Gattung des menschlichen Denkens überhaupt ist, so folgt unwidersprechlich, daß die Allgemeinheit und Nothwendigkeit der geometrischen Lehren in den höchsten Gesetzen des Denkens begründet sey. Ihre Gewißheit geht daher aus der Unabänderlichkeit jener

Gesetze hervor. Allein wo findet sich der Grund ihrer Faßlichkeit? Nach meiner Ueberzeugung lediglich in der ungemeinen Klarheit unserer Vorstellung vom Raume überhaupt, und von Körpern, Flächen und Linien. Das Feld dieser Anschauungen ist der klassische Boden des Geometers. Durch Anwendung der Grundgesetze des Denkens auf diesen reichhaltigen Stoff errichtet er sein festes, dem Auge des Geistes so wohlgefälliges Gebäude. Verläßt er diesen fruchtbaren Boden und schweifet in das (oft so leicht schwankende) Reich der Begriffe, so entfernt er sich von dem ächt geometrischen Geiste, und vergiebt der Wissenschaft ihren eigenthümlichen Grundcharacter: die Evidenz. Dies bestätiget vielfältig die Geschichte. Warum fand z. B. Wolfs Begriff und Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke; warum so manche, übrigens mit vieler Gründlichkeit ausgeführte Lehre von den Parallellinien, welche sich auf bloße Begriffe und nicht auf bestimmte Constructionen im Raume gründet, bey den strengen Geometern keinen Beyfall? — Einzig wegen dieses verfehlten Wegs der ächt geometrischen Darstellung. Leicht ließ sich die Zahl dieser Beyspiele vermehren. — Nach dem letzten Grunde der Evidenz dieser Elementar-Anschauungen mögen die Metaphysiker forschen. Ihre etwaigen Controversen treffen aber den Geometer nicht; denn die geometrische Evidenz ist eine eben so unläugbare Thatsache, als es z. B. das Factum des Bewußtseyns überhaupt ist.

II. Inhalt und Zweck einer geometrischen Anschauungslehre.

Der Lehrvortrag jeder Wissenschaft muß ihrer Natur verhältnißmäßig seyn. Ihre Natur wird aber aus der Quelle erkannt, woher sie entspringet. Diese Urquelle ist für die Geometrie das Anschauungsvermögen des Raumes und der räumlichen Elementar-Objecte. Daher muß die Lehrmethode dieser Wissenschaft mit diesen Grundanschauungen beginnen, und dieselbe von ihrer höchsten Einfachheit, in lückenloser Stufenfolge, bis zu ihren wichtigsten Zusammensetzungen fortführen. Dieß systematisch geordnete Ganze ist aber noch keine geometrische Wissenschaft, sondern eine geometrische Anschauungslehre, d. h. eine nöthige Propädeutik zur eigentlichen Geometrie. Sie muß der allmähligen Entwickelung der menschlichen Natur-Anlagen folgen, und, gleich diesen, langsam und sicher fortschreiten. So wie die Erkenntniß des Kindes mit der Anschauung des Physischen im Raume beginnt, und sich nach und nach erst zu Begriffen ausbildet, so müssen auch diese geometrische Anschauungen zuerst nur sinnlich angeregt, und, nach vielseitig gebildetem Anschauungsvermögen, allmählig zum reingeistigen gesteigert werden. Diesen Stufengang lehrt uns die Natur. Wer aber dieser Lehrerin folgt, bildet sich selbst zum tüchtigsten Lehrer.

Vorstehende Grundsätze habe ich mich bemühet, in der oben (Vorber. z. erst. Aufl.) angeführten geometrischen Anschauungslehre (wovon ebenfalls eine

zweyte, verbesserte und vermehrte Auflage erschienen ist) practisch durchzuführen. Sie zerfällt in vier Cursus. Der erste ist den einfachsten Anschauungen geometrischer Gegenstände gewidmet, welche in wirklichen Zeichnungen auf der Schultafel dem Schüler vor's Auge gebracht werden. Dieser Cyclus beginnt mit der Anschauung des Puncts, der geraden und krummen Linien, der ungleichen und gleichen geraden Linien, der zusammenlaufenden, auseinanderlaufenden und gleichlaufenden Linien, geht sodann zu den verschiedenen Winkeln, Dreyecken, Vierecken und Vielecken über, und wird durch die Betrachtung des Kreises und der merkwürdigsten Linien in ihm und um ihn abgeschlossen. Hierbey ist durchaus von keinen wissenschaftlichen Erklärungen die Rede; aber alles muß sehr aufmerksam beschaut werden. Sind einmal diese Anschauungen recht klar und lebendig, so ist es leicht, sich von dem sinnlich Wahrgenommenen zu dem rein Geistigen zu erheben.

In dem zweyten Cursus wird der Zögling zur bequemen Bezeichnung der ihm nun schon geläufig gewordenen Anschauungen des ersten Cursus angeleitet. Diese geschieht durch die Buchstaben des lateinischen Alphabets, und es ist, zur Abkürzung des geometrischen Vortrags durchaus nothwendig, sich mit diesem Gegenstande vertraut zu machen. Auf solche Weise wird der zweyte Cursus zugleich eine Wiederholung des erstern. Ausserdem aber werden an die schon klar gewordenen, früheren Anschauungen wieder neue geknüpft, welche dem Zöglinge des ersten Cursus nicht faßlich ge-

nug gewesen seyn würden, nun aber mit großer Leichtigkeit aufgefaßt werden können. Auch hier kommen keine Erklärungen vor, sondern die gesammte Kenntniß des Schülers überschreitet noch nicht den Kreis des Anschauungsvermögens.

Der dritte Cursus ist dem allmähligen Uebergange vom Sinnlichen in das Geistige gewidmet. Hier wird das Gebiet der geometrischen Elementar-Anschauungen noch vollends abgeschlossen, und der Schüler zugleich angeleitet, sich vom Einzelnen zum Allgemeinen zu erheben, um hierdurch in den Besitz scharf bestimmter Begriffe zu gelangen. Diese wichtige Operation des Geistes wird nun sehr leicht, da ihm das Material dazu mit so großer Klarheit vorschwebt. Nun werden durchaus befriedigende Erklärungen verlangt, wodurch Bildung des Verstandes und scharfe Sprachkraft in gleichem Grade erreicht wird. Vorzüglich tritt hierbey der wichtige Unterschied zwischen Sach- und Wort-Erklärungen hervor, woraus der Schüler beurtheilen lernt, was das einfache Raisonnement über diese Uranschauungen vermöge, und was der eigentlichen Wissenschaft annoch zu berichtigen vorbehalten bleibe.

Der vierte Cursus erklärt die mathematischen Abkürzungszeichen, handelt ausführlich von den Grundsätzen und Forderungen, und schließet mit Angabe des Begriffs, der Hauptheile und der Methode der Mathematik; so, daß der Schluß dieser Anschauungslehre zugleich den Anfang der Elementarlehren der Geometrie bildet.

III. Verhältniß der geometrischen Anschauungslehre zu dem Unterrichte.

Man kann das Verhältniß der Schrift zu den Volksschulen, zu den Gymnasien, zu den Lyceen und Universitäten, zu den Normalschulen, zu den Kunstschulen und zu dem Privatunterrichte betrachten. Jedes dieser Verhältnisse soll kürzlich erwogen werden.

A. Verhältniß zu den Volksschulen.

Die Elemente einer tüchtigen Volksbildung sind: Weckung und Ausbildung des religiösen und moralischen Gefühls, Uebung der Verstandeskraft, und Sorge für Gesundheit, Stärke und Gewandheit des Körpers. Das Zweyte wird bey den Kleinen am kräftigsten durch Sprachbildung und durch die geometrische Anschauungslehre erreicht. Wie überhaupt in dem Menschen das Sinnliche zuerst erwacht und sich allmählich zum Geistigen fortbildet, so bringt auch diese Lehre eine Fülle von räumlichen Anschauungen zur Betrachtung, entwickelt dieselbe, und sucht sie sodann in scharfe Begriffe zu fassen. Anschauungs-Vermögen, Sprachkraft, Verstand werden hierdurch kräftig gebildet. Diese Bildung aber thut Jedem Noth, er mag sich dem Ackerbau oder den Handwerken, den Künsten oder den Wissenschaften widmen. So wird die Anschauungslehre höchst bedeutend für ächte Volksbildung, welche selbst wiederum von größter Bedeutung für die innere Kraft der Staaten ist. Daher soll in jeder Landschule

diese geiststärkende Lehre ernstlich geübt werden. Im Laufe von zwey Jahren kann sie, bey vier Wochenstunden, vollkommen durchgeführt und gehörig wiederholt seyn. Der Lehrer muß das Buch besitzen, und sich durch Privatstudium mit dessen Geist und Methode vertraut machen, was Jedem, der zum Lehramte überhaupt Beruf fühlt, sehr leicht werden wird. Die Schulkinder brauchen die Schrift nicht zu haben; Bemittelte mögen sich solche wohl anschaffen. Aber der Lehrer lasse jeden Schüler auf sein kleines Schiefertäfelchen alle Zeichnungen nachbilden, die er an der Schultafel zur allgemeinen Anschauung bringt. Dieses bildet den Geist, übt den Blick und die Hand, schärft das Augenmaß, und ist eine wirksame Vorübung zur freyen Handzeichenkunst. Da sich in den Landschulen Kinder von höchst verschiedener Anlage versammeln, so muß der Lehrer auf das Bedürfniß der ganzen Schule sehen, und nur allmählich, aber sicher, in dem Unterrichte fortschreiten. Daher sind ihnen häufige Wiederholungen sehr zu empfehlen. Beherzigt er diese Winke, so wird er in der Lust, womit die Kleinen an der Lehre Theil nehmen, und in ihren raschen Fortschritten reichhaltigen Lohn für seine Bemühung finden.

B. Verhältniß zu den Gymnasien.

Religionsunterricht, Sprachstudium und Mathematik sind die Grundpfeiler einer ächten Gymnasial-Bildung. Besonders erkennt man wieder in unsern Tagen den wichtigen Einfluß der Mathesis auf Ent-

wickelung und Erhöhung der Verstandeskraft. Aber nicht durch jede Lehrmethode wird dieser wichtige Zweck erreicht. Nur der wissenschaftlich-mathematische Vortrag stärkt und erhebt den Geist, der mechanische schwächt und unterdrückt ihn. Vorzüglich tritt die Geometrie als kräftige Geistesgymnastik hervor. Sie vereiniget erfreuliche Klarheit mit strenger Gewißheit. Aber sie muß ein sicheres Fundament haben, worauf sie ruhet und mit Leichtigkeit aufgeführt werden kann. Dieß ist die geometrische Anschauungslehre, die es sich zur Aufgabe macht, zwischen den ins Unendliche gehenden Combinationen räumlicher Objecte, und zwischen ihrer allzubeschränkten Darstellung ein zweckmäßiges Mittel zu halten. Ihr Vortrag findet daher an jedem Gymnasium, als Einleitung zum Studium der Geometrie, ihre schicklichste Stelle in jener Klasse, mit welcher im nächstfolgenden Schuljahre die eigentliche Geometrie begonnen wird. Bey drey Wochenstunden ist ein Jahr hinreichend, um sie mit Nutzen durchzuführen. Da die Gymnasiasten bereits in freyer Geistesbildung einige Fortschritte gemacht haben, so muß der Vortrag der Anschauungslehre diesem Standpuncte entsprechen. Der Lehrer bringt alle Anschauungen des ersten Cursus nach und nach auf die Schultafel, benennt sie, und läßt solche von einzelnen Schülern wiederholen. Das Zugleichantworten der Classe wäre hier störend; aber da Jeder der Frage gewärtig seyn muß, so bleiben alle Schüler in gespannter Aufmerksamkeit.

(**)

in den halben Bogen einzulegen.

Dieser examinatorische Vortrag muß sich durch sämmtliche Cursus erstrecken, und wird der Lehre selbst Lebendigkeit und Theilnahme gewähren. Vorzüglich sehe der Lehrer auf Sprachrichtigkeit der Antworten seiner Schüler; besonders in dem dritten und vierten Cursus, welche den Verstand mehr als die Anschauungskraft in Anspruch nehmen. Zweckmäßig ist es, wenn jeder Schüler die auf der Schultafel erblickten Zeichnungen entweder in einem besonderen Hefte oder auf einer Schiefertafel selbst nachbildet. Auch sollen Alle das Lehrbuch besitzen, weil das Nachlesen des Vorgetragenen durchaus erfoderlich ist. Hat nun der Lehrer das nöthige Lehrtalent (ohne welches kein Unterricht gedeiht), so wird er mit Freude die Fortschritte seiner Schüler erblicken, und diesen geometrischen Vorübungen sodann die eigentliche Geometrie folgen lassen.

C. Verhältniß zu den Lyceen und Universitäten.

Lyceen und Universitäten haben den wichtigen Beruf, die Keime gelehrter Bildung zur Blüthe und segensreichen Frucht zu erziehen. Das Studium der Mathesis wird hierzu einen wirksamen Beytrag liefern, und insonderheit die Geometrie. Der Lehrplan verschiedener Lyceen ist aber sehr verschieden. Wird das gründliche Studium der Geometrie hier erst begonnen, so findet die Anwendung der geometrischen Anschauungslehre gerade so, wie bey den Gymnasien

statt. Sollen aber die geometrischen Grundlehren für Lyceisten oder Academiker vorgetragen werden, welche bereits in der mathematischen Bildung etwas fortgeschritten sind, so wird die Anschauungslehre, als Einleitung zur Geometrie, von dem Lehrer nach dem Hauptinhalte jedes Curses kürzlich durchgeführt, welches, bey vier Wochenlectionen, nur eine Zeit von höchstens sechs Wochen erfodert. Auch wird solchen gebildeten Schülern, der strengen Lehrmethode wegen, diese Propädeutik schon deßhalb erfreulich seyn. Es wird sich daher weder der academische Lehrer, noch der academische Schüler dieser Anschauungslehre auf der hohen Schule zu schämen haben, sobald Jener einmal die Elementargeometrie vortragen, Dieser aber sie studieren will. Zum Leitfaden dieser Elemente dienet sodann meine geometrische Wissenschaftslehre, welcher das Streben nach rein geistiger Behandlung der Geometrie zum Grunde liegt, ohne das practische Bedürfniß gänzlich davon auszuschließen.

D. Verhältniß zu den Normalschulen.

In den Normalschulen sollen tüchtige Volksschullehrer gebildet werden. Soll aber der Lehrer diesem wichtigen Zwecke entsprechen, so muß er die nöthige Sachkenntniß mit einer guten Lehrmethode vereinigen. Letzteres ist so unentbehrlich, als Ersteres. Was nützt des Lehrers eigenes Wissen, wenn er nicht

die Gabe besitzt, dem jugendlichen Geiste Theilnahme einzuflößen, ihn kräftig zu wecken, und sicher zu leiten? Sein Geist muß die Schüler durchdringen, um Aehnliches in ihnen hervorzurufen. Wie vermag dieß ein Lehrer, der die Individualität des Schülers verkennt? Dieser individuellen Anlage, mit steter Hinsicht auf die Natur des Lehrgegenstandes in dem Vortrage folgen, heißt mit Zweckmäßigkeit lehren. Ausser einem natürlichen Talente kann der Lehrvortrag durch Studium und besonnene Uebung in hohem Grade vervollkommnet werden. Zu diesem Zwecke ist Normalschülern die geometrische Anschauungslehre vorzüglich wichtig. Hier lernen sie das Wesen und die Grundzüge eine strengen, vom Einfachen allmählich zum Zusammengesezten fortschreitenden, und durchaus im leicht faßlichen Kreise des Anschaulichen sich bewegenden Methode kennen; sie erhalten Anleitung zu den so höchst nöthigen catechetischen Uebungen, und wenn sich mit dieser theoretischen Bildung später noch die practische Fertigkeit verbindet, so ist in ihnen der Grund zu einem tüchtigen Schulmanne gelegt, der seinem hohen Berufe immer näher rücken wird. Es bedarf kaum einer Erinnerung, daß diese Anschauungs-Uebungen sich nicht blos auf einseitige Schärfung des geometrischen Blickes beschränken, sondern daß aus ihnen der Keim zu jeder naturgemäßen Lehrmethode hervorgehe. Denn gleichwie es nur einen menschlichen Geist giebt, so folgt derselbe auch nur einem Entwickelungs- und Bildungsgesetze. Wer demnach dieses einmal erkannt, und sich ange-

eignet hat, bleibt auf immer in dessen Besitze, um solches auf höchst manigfaltige Weise, in der Wissenschaft wie im Leben, wiederum zu benützen. Sind einmal die Normalschüler durch die geometrische Anschauungslehre kräftig vorbereitet, so wird in Vielen die edle Begierde zur eigentlichen Wissenschaftslehre geweckt, und sie dadurch ermuntert werden, das Gebiet der Geometrie mit Nutzen zu betreten.

E. Verhältniß zu den Realschulen.

Die Realschulen oder höhere Bürgerschulen sollen den Uebergang aus den Elementarschulen in das bürgerliche, Handel- oder Gewerbtreibende Leben vermitteln, und den Schüler mit jenen Hülfskenntnissen vertraut machen, ohne welche er sich dereinst nicht über das blos Mechanische erheben würde. Arithmetik und Geometrie stehen, in ihren mannigfaltigen Anwendungen hierbey oben an. Vorzüglich wird die geometrische Anschauungslehre, ausser ihrem wohlthätigen Einflusse auf die Verstandesbildung überhaupt, zur Schärfung des Anschauungsvermögens ungemein wirken, und dem künftigen Gewerbsmanne jenen scharfen Blick und jenes geübte Augenmaaß verleihen, welche in allen practisch-technischen Anwendungen von so großer Wichtigkeit sind.

F. Verhältniß zu den Kunstschulen.

Alle Raumkünste, z. B. Zeichenkunst, Malerey, die bildenden Künste, beruhen auf Linien, Flächen,

Körpern, und ihren verschiedenen Combinationen. Nur mit einem gebildeten Anschauungsvermögen wird der Künstler in seinem Fache leichte und sichere Fortschritte machen. So erscheint also die geometrische Anschauungslehre, besonders wenn sie mit practischen Uebungen der Schüler verbunden wird, als sehr nützliche Propädeutik zur Zeichenkunst und Malerey. Die Perspective- und Zeichnung der Grundrisse und Aufrisse steht ohnedieß in engster Verbindung mit ihr. Körperliche Raumkünste (die plastischen) erfodern natürlich auch eine körperliche Anschauungslehre zur Vorbereitung. Mit Recht sagt Hr. Professor Ladomus (in seiner zur höhern Bildung der Verstandes- und Anschauungskraft vorzüglich zu empfehlenden, kürzlich erschienenen, trefflichen Lehre von den Kegelschnitten S. XXIII,) „vis technica aller technischen Künste ist und bleibt einmal die Mathematik, und wie das Gerippe so zu sagen der Träger von der Schönheit des menschlichen Körpers, so ist und bleibt die Mathematik die Grundlage für die Raumkünste." Auf welche Weise die Anschauungslehre diesen technischen Künsten zur Hülfslehre dienen kann, muß aus der Anlage und Bildung, so wie auch nach dem Zwecke des Schülers, ermessen werden.

G. Verhältniß zu dem Privatunterrichte.

Die Anwendung der geometrischen Anschauungslehre bey dem Privatunterrichte geht aus dem verschiedenen

Zwecke hervor, welchen man durch diesen Unterricht zu erreichen strebt. Für Knaben, welche, ohne sich dem gelehrten Stande zu widmen, eine blos allgemeine Bildung genießen sollen, befolgt sie den Lehrplan für den Volksunterricht. Will sich der Zögling zum Künstler oder zum denkenden Handwerker bilden, so dient ihm die Anschauungslehre als theoretisch-practisches Hülfsmittel zur Leitung und Anwendung seines Talentes. Bey Knaben, welche sich späterhin dem Studium ernster Wissenschaften widmen, muß die Lehrmethode jener an Gymnasien folgen. Jünglinge und Männer genießen diesen Unterricht nach ähnlichen Abstufungen; nur mit dem Unterschiede, daß der Lehrer auf den höhern Grad von Ausbildung dieser reifern Schüler verständige Rücksicht zu nehmen hat. Doch darf nichts, so elementar und allbekannt es auch scheinen mögte, übergangen, sondern Alles muß, nur in größerer Kürze, durchgeführt werden. Diese Lückenlosigkeit ist wesentliches Erfoderniß des systematischen Vortrags und nur durch ununterbrochenes gründliches Fortschreiten kann der Geist des Schülers, er sey Kind, Knabe oder Mann, kräftig gebildet werden. Bey diesem Privatunterrichte tritt noch der Vortheil ein, daß die Anschauungsobjecte auf eine kleine Schiefertafel gezeichnet, leicht in jede veränderte Lage gebracht und von dem Schüler bequem nachgebildet werden können.

IV. Lehr=Vortrag der Geometrie für gelehrte Bildungsanstalten.

Hier ist nun der Ort, ein paar Worte über den Vortrag der eigentlichen Geometrie an gelehrten Schulen zu sprechen. Dies scheint um so wichtiger, als es blos von der Art des Vortrags abhängt, daß diese Wissenschaft bald zu der nützlichsten und angenehmsten Unterhaltung, bald aber zur Plage und Geisel der Schüler wird. Der Lehrer erfasse nur zuvor selbst den wahren Sinn der Mathesis, er überzeuge sich, daß diese Lehre, aus dem Geiste entsprungen, auch nur einer rein geistigen Behandlungsweise fähig sey. Er beherzige wohl, daß die Geometrie nicht in einer Zusammenstellung empirischer Thatsachen bestehe, welche man dem Gedächtnisse einzuverleiben hat; sondern daß ihre Wahrheiten das ächte Gepräge strenger Allgemeinheit und Nothwendigkeit tragen, welche, als blos geistige Producte, nicht durch die Sinne des Leibes erkannt, sondern mit dem Auge des Geistes erfaßt und durchforscht werden müssen.

Aus diesen Betrachtungen gehen folgende Sätze und Gegensätze hervor, welche die Hauptzüge zu dem Bilde eines tauglichen und untauglichen Lehrers der Geometrie entwerfen.

Jener hält die Bildung des Geistes für den Hauptzweck, der durch das Studium dieser Wissenschaft auf öffentlichen Lehranstalten erreicht werden soll, die practischen Anwendungen aber nur für Nebenzweck; und richtet nach diesem seine Vorträge ein.

Dieser glaubt, er müsse die Geometrie einzig wegen des practischen Linien- Flächen- und Körper-Messens lehren.

Jener begnügt sich nirgends mit blos mechanischen Beweisen der Sätze, sondern will seine Schüler in den Geist der Sache einführen. Er sucht sie daher von der äußern Anschauung der räumlichen Objecte in das Innere Ihrer selbst zu lenken; denn nur in dem Geiste und durch den Geist ist wahre Geometrie, als Wissenschaft, möglich.

Dieser ist meist mit blos mechanischen Beweisen zufrieden. Was dem Auge im Einzelnen erscheinet, soll sogleich auch vom Verstande, als allgemein gültige Wahrheit, anerkannt werden. Durch ihn wird der Geist aus seinem eigenthümlichen Wohnsitze heraus und in das (oft unsichere) Gebiet der blos sinnlichen Wahrnehmungen gezogen.

Jener bereitet die Schüler zu einem fruchtbaren Studium der Geometrie durch die geometrische Anschauungslehre vor. Diese giebt ihnen Kraft und Gewandtheit, sich mit Leichtigkeit in die Objecte der Geometrie zu finden, und ihre Verhältnisse um so schärfer zu übersehen.

Dieser begnügt sich, der geometrischen Lehre eine nothdürftige und magere Einleitung voranzuschicken. Der Schüler wird in wenigen Lehrstunden mit einer Menge von Anschauungen und Begriffen bestürmt, welcher, kaum flüchtig und verworren aufgefaßt, nun sogleich die geometrischen Beweise folgen, deren streng

zusammenhängende Form dem ersten Anfänger nun große Schwierigkeiten verursacht. — Wie kann hier der gute Kopf schnelle, das mittelmäßige Talent aber nur einige Fortschritte machen?

Jener macht sichs zur Regel, den eben zu beweisenden Satz den Schülern zuerst mit verständlichen Worten vorzusprechen. Er zeichnet die dazu gehörige Figur an die Schultafel, und erklärt den Sinn des Satzes an derselben. Dabey unterscheidet er, sowohl bey Theoremen als bey Problemen, die Hypothesis von der Thesis, und läßt, bey etwas verwickelten Sätzen, Beydes von Einem oder von einigen Schülern wiederholen. Ist ihnen der Sinn der Behauptung oder der Forderung vollkommen klar, so beginnt (nach gezogenen Hülfslinien und angeführter Auflösung der Aufgaben) der Beweis. Dieser ist, der Regel nach, synthetisch. Der Lehrer geht, in freyem Gespräche, von einem Vordersatze zum andern, weiset Alles (mit einem Zeiger auf die Tafel deutend) sogleich nach, und nöthigt hierdurch die Schüler, ihren Blick und ihre Aufmerksamkeit auf die Zeichnung zu heften. So gelangt er zum Schlusse der Demonstration. Diese wird nun entweder von dem Lehrer, oder von einem Schüler, oder von mehreren wiederholt, um zu sehen, wo noch Dunkelheiten herrschen, die sogleich aufgehellt werden. Der zweckmäßigste Leitfaden dieses Unterrichts ist eine systematisch geordnete Reihe von Sätzen über die Grundlehren der Geometrie, welcher jedoch keine Beweise oder nur Andeutungen dazu

beygefügt sind. Nachfolgende Schrift enthält die Ausführung davon. Diese Beweise muß, gleich den Auflösungen der Aufgaben, der Privatfleiß des Schülers, nach der vom Lehrer erhaltenen Anleitung ersetzen. Hierdurch wird der Beweis zum geistigen Eigenthum der Schüler, und diese Anwendung eigner Kraft erhöhet ihr Interesse an der Wissenschaft.

Dieser ließt den zu erweisenden Satz aus seinem Autor ab, und läßt sich nicht weiter in die Erklärung desselben ein. Entfernt, die dazu gehörige Zeichnung auf der Tafel zu entwerfen, und den Beweis mit eignen Worten zu geben, hält er sich sclavisch an die Perioden seines Lehrbuchs; zufrieden, wenn nur Er von der Wahrheit der Behauptung überzeugt ist. — Wohin kann eine so todte Behandlung der lebendigen Wissenschaft führen? Wie mag der Schüler einer Lehrart Interesse abgewinnen, welche einem Auskramen hieroglyphischer Formeln gleicht? Und ist es ihm zu verargen, wenn seine Aufmerksamkeit schwindet, und ein unbesiegbarer Widerwille gegen diese mysteriöse Lehre sich seiner bemächtigt? —

Der gute Lehrer verbindet endlich öfters mit der Synthesis die analytische Methode. Denn diese ist es, welche den Verstand zum Selbsterfinden am Kräftigsten vorbereitet. Sehr nöthig ist es daher, zumal an etwas zusammengesetztern Beweisen, beyde Methoden zugleich anzuwenden. In keiner Wissenschaft giebt es ein wirksameres Bildungsmittel des jugendlichen Geistes, als dieses. Nichts kann auch die Theil-

nahme des Schülers höher spannen, als wenn er sich als Selbsterfinder der geometrischen Wahrheit erblickt. Darum ist auch dies Ziel das höchste und glänzendste des Lehrvortrags. Mit größter Klarheit erkennt der Schüler diese fruchtbare Quelle des menschlichen Geistes, und ist ihm nur einiges Gefühl für den unschätzbaren Werth der Wahrheit verliehen, so wird er, zur kräftigen Selbstthätigkeit angeregt, diesen geistigen Weg niemals verlassen.

Uebersicht des Werks.

Erster Cursus.

Reine Elementargeometrie.

		Seite
I.	Grundlehren vom Kreise	3
II.	Construction der Dreyecke nach ihren Seiten	13
III.	Congruenz der Dreyecke	17
IV.	Leichte Anwendungen von der Congruenz der Dreyecke	23
V.	Die Lehre von den Parallellinien	35
VI.	Die Vierecke und ihre verschiedene Arten . .	43
VII.	Die drey Winkel Dreyecke. Maaß der Winkel	47
VIII.	Gleichheit der Parallelogramme und Dreyecke, und ihre Verwandlung	52
IX.	Die Sehnen und Tangenten des Kreises . .	59
X.	Von den Mittelpuncts- und Peripheriewinkeln	69
XI.	Die regelmäßigen Vielecke	71
XII.	Aehnlichkeit der Dreyecke	80
XIII.	Aehnlichkeit geradliniger Vielecke	98

Zweyter Cursus.

Rechnende Elementargeometrie.

I.	Allgemeine Vorbegriffe	105
II.	Ausmessung geradliniger Figuren	108

Seite

III. Kreisrechnungen 114
IV. Linienverhältnisse vermittelst des Kreises . . 124
V. Geometrische Theilungen der Figuren 129

Dritter Cursus.

Practische Elementargeometrie.

I. Vom Messen gerader Linien überhaupt . . . 137
II. Das Messen der Entfernungen mit einfachen Werkzeugen 146
III. Figuren auf dem Felde in den Grund zu legen 150
IV. Das Messen mit künstlichen Geräthschaften . . 154
V. Etwas vom Höhenmessen 170

Vierter Cursus.

Elementar-Trigonometrie.

I. Vorbereitungslehren vom Ausziehen der Quadratwurzel 175
II. Geometrische Anwendungen vom Wurzelausziehen 188
III. Vordersätze zur rechnenden Dreyeckslehre . . 194
IV. Berechnung der fehlenden Stücke des Dreyecks 208
V. Einige andere Anwendungen dieser Lehre . . 224
VI. Berechnung der Dreyecksebene aus ihren gegebenen drey Seiten 230

Der

geometrischen Wissenschaftslehre

erster Cursus.

Reine Elementargeometrie.

Reine Elementargeometrie.

I. Grundlehren vom Kreise.

§. 1.

Erklärungen. I. In einer unbegrenzten Ebene nehme man eine beliebige gerade Linie an, und in dieser einen willkührlichen Punct.

Die Papierfläche von Tafel I. stelle jene Ebene, AB (Fig. 1.) die gerade Linie in ihr, und C den gewählten Punct vor.

II. Von diesem Puncte nehme man auf der geraden Linie, nach einer oder der andern Seite hin, ein willkührliches Stück.

Dieses Stück sey die von C auf CA genommene gerade Linie CD.

III. Es bewege sich dieses Stück um den festen Punct (II.) in der Ebene (I.) einmal ganz und gar herum, bis es wieder in die erste Lage zurückekehrt.

Die gerade CD drehe sich so um den unbeweglichen Punct C, daß sie immer in der nämlichen Ebene bleibt, und der Punct D in H, F, E, L, G, I, und wieder zurück in D kömmt.

IV. Durch dieses Herumbewegen (III.) beschreibt der bewegte Endpunct dieses Stückes eine krumme,

in sich selbst zurücklaufende Linie, welche die Kreislinie heißt.

Der um C in der Entfernung CD fortschreitende Punct D beschreibt die Kreislinie DHFELGID.

V. Der von dieser Kreislinie eingeschlossene Flächenraum heißt die Kreisfläche oder die Kreisebene.

Die von der Kreislinie DHFELGID begrenzte Ebene ist diese Kreisfläche.

VI. Die Kreisfläche oder Kreisebene (V.) ist eine Figur, und zwar eine krummlinige Figur.

VII. Man nennt die ganze Kreislinie die Peripherie oder den Umfang des Kreises. Jeder zwischen zwey beliebigen Puncten enthaltene Theil derselben, heißt ein Bogen des Kreises oder ein Kreisbogen.

Durch die Puncte D und H wird der Bogen DH, durch H und F der Bogen HF, durch E, G und I der Bogen EGI bestimmt. Größere Bogen benennt man am Füglichsten mit drey Buchstaben. Denn: Bogen EI könnte auch das Stück EFI bezeichnen.

VIII. Die gerade Linie (II.) durch deren Umdrehung die Kreislinie (IV.) entstanden ist, heißt der Halbmesser oder Radius des Kreises.

Daher ist CD der Halbmesser des Kreises DHFEGID.

IX. Der feste Endpunct des Halbmessers (VIII.) heißt der Mittelpunct, sein beweglicher Punct aber der beschreibende Punct des Kreises.

Somit ist C der Mittelpunct, D der beschreibende Punct des Kreises DHFEGID.

X. Eine gerade Linie, welche von einem beliebigen Puncte des Umfangs (VII.) durch den Mittelpunct (IX.) bis wieder zum Umfange geht, nennt man den Durchmesser oder Diameter des Kreises.

Daher sind die Linien DE und HL Durchmesser.

XI. Jene gerade Linie, welche, ohne durch den Mittelpunct (IX.) zu gehen, die Peripherie zweymal berührt, heißt eine Sehne oder Chorde; jeder der beyden durch die Endpuncte der Sehne bestimmte Bogen (VII.) wird der zur Sehne gehörige Bogen genannt.

Die gerade Linie IG ist eine Sehne; die Bogen IDHFELG und IKG sind die dazugehörigen Bogen.

XII. Derjenige Theil der Kreisebene (V.), welcher von einer Sehne und dem dazugehörigen Bogen (XI.) eingeschlossen ist, heißt ein Abschnitt des Kreises, oder Kreisabschnitt. Jenes Stück seiner Fläche aber, welches von zwey Halbmessern (VIII.) und dem dazwischen liegenden Bogen (VII.) begrenzt wird, heißt der Ausschnitt des Kreises, oder Kreisausschnitt.

Daher ist sowohl IFEGI als IKGI ein Abschnitt; DCHD oder FELCF ein Ausschnitt.

§. 2.

Grundsätze. I. Alle Halbmesser des nemlichen Kreises sind einander gleich; oder CD = CH = CF = CE u. s. f.

II. Da jeder Durchmesser aus zwey Halbmessern besteht (§. 1. X), so sind auch in dem nämlichen Kreise alle Durchmesser gleich.

Daher ist DE = HL u. s. w.

III. Eine gerade, aus des Kreises Mittelpuncte gehende Linie, welche kleiner, als dessen Halbmesser ist, liegt ganz innerhalb des Kreises.

Wenn CM < CD, so liegt CM ganz in dem Kreise.

IV. Ist aber die gerade, aus dem Mittelpuncte kommende Linie größer, als des Kreises Halbmesser ist, so liegt ein Theil von ihr und ihr Endpunct ausserhalb des Kreises.

Es sey CN > CD, so ist, weil CS = CD (I.), das Stück SN ausser dem Kreise.

V. Eine (gerade oder krumme) Linie, welche einen Punct in dem Kreise (III.) mit einem Puncte ausserhalb desselben (IV.) verbindet, muß seinen Umfang wenigstens in einem Puncte durchschneiden.

Wenn O in und P ausser dem Kreise liegt, so wird die gerade Linie OP die Peripherie in Q, die krumme ORP aber die Peripherie in R schneiden.

§. 3.

Foderung. In jeder gegebenen Ebene aus einem gegebenen Puncte mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu construiren.

§. 4.

Erklärung. Kreise, welche aus einerley Mittelpuncte mit ungleichen Halbmessern in einerley Ebene construirt sind, heißen concentrische Kreise.

Wenn (Fig. 2.) aus C mit CD der Kreis DEFD, und mit CA > CD der Kreis AGHLA beschrieben ist, so sind diese Kreise concentrische.

Wenn man mehr als zwey ungleiche Halbmesser annimmt, so kann man auch mehr als zwey concentrische Kreise bilden.

§. 5.

Lehrsatz. Concentrische Kreislinien (§. 4.) haben keinen Punct mit einander gemein.

Beweis. I. Direkt. Daß die mit dem größeren Halbmesser beschriebene Kreislinie keinen Punct mit der durch den kleineren Halbmesser entstandenen Kreislinie gemein haben könne, folgt aus dem Obigen (§. 2. IV.). — Auch ist (nach §. 1. III.) klar, daß die kleinere Kreislinie keinen Punct mit der größeren gemein haben kann.

II. Indirect. Weil sonst die beyden Kreislinien für den gemeinschaftlichen Punct auch einen gemeinschaftlichen Halbmrsser haben müßten, was gegen die Voraussetzung (in §. 4.) ist.

§. 6.

Grundsätze. I. Zwischen zwey Puncten ist die gerade Linie die kürzeste. Jede andere (gebrochene, krumme oder vermischte) Linie zwischen den nämlichen Puncten ist folglich größer.

Es sey AB (Fig. 3.) eine gerade Linie, so ist AB < AC + CB; AB < ADEB; AB < AFGB; AB < AHKB u. s. f.

II. Da es zwischen zwey Puncten nur eine kür-zeste Linie, und auch nur einen Abstand des einen Punctes vom andern geben kann, so wird der Abstand zweyer Puncte durch die gerade Linie zwischen ihnen bestimmt.

§. 7

Erklärung. Kreislinien, welche aus verschiedenen Mittelpuncten, (mit gleichen oder ungleichen Halbmessern) beschrieben sind, werden excentrische Kreislinien genannt.

Die Kreislinien in den Fig. 4, 5, 6, sind excentrische.

§. 8.

Lehrsatz. Wenn man in einer willkührlichen geraden Linie zwey beliebige Puncte und von jedem gegen den andern ein Stück auf der Linie dergestalt nimmt, daß ihre Summe kleiner, als der Abstand (§. 6., II.) jener Puncte ist, so liegen die beyden mit diesen Stücken aus jenen Puncten beschriebenen Kreise ganz ausser einander, d. h., sie haben nichts gemein.

Es sey RS (Fig. 4.) die gerade Linie, M und N seyen die willkührlichen Puncte in ihr, MC und NE die angenommenen Stücke, und $MC + NE < MN$, so haben die mit MC und NE aus M und N beschriebenen Kreise CBADC EFGHE nichts miteinander gemein.

Beweis. Hätten sie z. B. in O einen gemein-

schaftlichen Punct, so müßten MO und NO Halbmesser seyn, und es wäre MO + NO = MC + NE; folglich hätte man MO + NO < MN, welches unmöglich ist, da MO + NO > MN seyn muß. (§. 6, I.)

§. 9.

Lehrsatz. Wenn in einer gegebenen geraden Linie zwey willkührliche Puncte, und zwischen beyden noch ein dritter nach Belieben genommen werden, so haben die zwey Kreise, welche aus den zwey ersten Puncten mit den beyden Stücken der dazwischen liegenden Linie beschrieben werden; nur einen Berührungspunct gemein.

Auf der geraden Linie MN (Fig. 5.) seyen B und D die zwey zuerst gewählten Puncte, C der willkührliche Zwischenpunct, so werden die mit BC und DC aus B und D beschriebenen Kreise CFAGC und CHEIC sich nur in C berühren.

Beweis. Denn sie können (nach dem Beweise im vorigen §.) keinen andern Punct mehr gemein haben.

§. 10.

Lehrsatz. Wenn man in einer geraden Linie zwey Puncte willkührlich nimmt, mit einem willkührlichen Stücke ihres Abstandes aus dem einen Puncte einen Kreis beschreibt, und dann auch aus dem zweyten mit einem zweyten

Stücke (kleiner als dieser Abstand) einen zweyten beschreibt, so daß die Summe der beyden Stücke größer, als der Abstand der Mittelpuncte dieser Kreise ist, so müssen sich die beyden Kreislinien in zwey Puncten durchschneiden.

Es sey MN (Fig. 6.) die gerade Linie, B und C seyen die in ihr angenommenen Puncte, und mit dem Stücke BF < BC sey der Kreis FRADF beschrieben, so wird, wenn man nun aus C mit einem Stücke CE, so daß CE < CB, und CE + BF > BC ist, einen Kreis EHDG beschreibt, dieser den ersten in zwey Puncten M und N durchschneiden.

Beweis. Da nach der Annahme BF + CE > BC, so liegt der Punct E innerhalb des Kreises FRADF, der Punct D ausserhalb desselben. Da nun ferner die mit dem Halbmesser CE beschriebene Kreislinie eine ununterbrochene Linie ist, so muß sie sowohl oberhalb als unterhalb der Linie MN aus dem Kreise FRADF heraustreten. Dies giebt zwey Durchschnittspuncte M und N.

§. 11.

Lehrsatz. Wenn man in der Fläche eines gegebenen Kreises, ausser dessen Mittelpuncte, einen willkührlichen Punct als Mittelpunct eines zweyten Kreises annimmt, und aus diesem mit einem Halbmesser, der, zur Entfernung beyder Mittelpuncte addirt, kleiner als der Radius des

gegebenen Kreises ist, einen Kreis beschreibt, so liegt der zweyte Kreis ganz in dem ersten, und die Kreislinien haben keinen Punct gemein.

Wenn man in der Fläche des mit dem Halbmesser CE (Fig. 7.) beschriebenen Kreises EMNRE den willkührlichen Punct B annimmt, und aus ihm mit dem Halbmesser BD, jedoch so, daß BD + CB < CE, einen Kreis DFVGD beschreibt, so liegt dieser ganz innerhalb des größern, und die Kreislinien haben keinen Punct gemein.

Beweis. Die Wahrheit des Satzes folgt daraus, daß nach der Annahme CB + BD < CE, folglich BD < BE, und um so mehr BD < BN seyn muß.

§. 12.

Zusatz. Obschon in diesem Falle (§. 11.) die Entfernung der Mittelpuncte beyder Kreise kleiner, als die Summe ihrer Halbmesser ist, so schneiden sich beyde Kreislinien dennoch nicht.

§. 13.

Zusatz. Wenn (in §. 11.) die Entfernung der Mittelpuncte, nebst dem Halbmesser des kleinen Kreises, dem Radius des großen gleich ist, so berührt der kleine den großen in einem Puncte von Innen.

Wenn (Fig. 8.) CB + BD = CD, so berührt der Kreis DFVGD den größeren Kreis DMNRD in dem

Puncte D. Denn jener kann diesen weder schneiden, noch ganz in diesen fallen.

§. 13. *a*.

Anmerkung. Alle mögliche Fälle vom Schneiden und Berühren zweyer Kreislinien lassen sich auf folgende Weise bequem übersehen. Wenn aus einem willkührlichen Puncte mit beliebigem Halbmesser ein Kreis beschrieben und ausserhalb desselben ein zweyter Punct als Mittelpunct eines zweyten Kreises genommen wird, so ist entweder

I. Der Halbmesser dieses zweyten Kreises nebst jenem des ersten Kreises zusammen kleiner, als die Entfernung der Mittelpuncte beyder Kreise, und nun liegen beyde Kreise ganz ausser einander; oder

II. Die Summe beyder Halbmesser ist dem Abstande ihrer Mittelpuncte gleich, und nun berühren sich beyde Kreise in einem Puncte von Aussen; oder

III. Die Summe beyder Radien ist größer als die Entfernung der Mittelpuncte, jedoch so, daß des zweyten Kreises Halbmesser kleiner als der Abstand ihrer Mittelpuncte nebst dem Radius des ersten Kreises ist, und nun durchschneiden sich beyde Kreise einander in zwey Puncten: oder

IV. Der Halbmesser des zweyten Kreises ist der Summe aus der Entfernung ihrer Mittelpuncte und dem Radius des ersten Kreises gleich, und nun berühren sich beyde Kreise in einem Puncte von Innen; oder

V. Der Radius des zweyten Kreises ist größer als die Summe aus dem Abstande ihrer Mittelpuncte und

dem Halbmesser des ersten Kreises, und nun liegt der erste Kreis ganz in dem zweyten und beyde haben keinen Punct mit einnander gemein. Der erste Kreis ist hier der umschlossene, der zweyte Kreis der umschliesende.

Der Lehrer mache diese fünf Fälle an einer Zeichnung klar, oder lasse sie von den Schülern finden.

II. Construction der Dreyecke nach ihren Seiten.

§. 14.

Aufgabe. Ein Dreyeck zu construiren, ohne auf die Größe seiner Seiten Rücksicht zu nehmen.

Auflösung. I. Durch drey Puncte, die nicht in gerader Linie liegen, und durch drey gerade Linien verbunden werden.

II. Durch Construction eines Winkels, dessen Oeffnung durch eine beliebige gerade Linie geschlossen wird.

III. Durch Construction einer Winkellinie, die von einem Puncte ausgehet und zu dem anderen zurückekehrt, der mit jenem durch eine gerade Linie verbunden ist.

I. Es seyen (Fig. 9.) A, B und C die drey gegebenen, nicht in gerader Linie liegenden Puncte, so wird durch die gezogenen drey geraden Linien AB, AC und CB das Dreyeck ACB construirt.

II. Durch Construction eines Winkels CAB, der mit der geraden Linie CB geschlossen wird, entstehet ebenfalls ein Dreyeck CAB.

III. Durch eine gerade Linie AB und eine Winkellinie ACB, die von A ausgeht, und durch C nach B zurückekehrt, entspringt wieder ein Dreyeck ACB.

§. 15.

Anmerkung. Der Lehrer wird diese Entstehungsweise der Dreyecke auf mehrfache Weise erläutern.

§. 16.

Lehrsatz. In jedem Dreyecke sind je zwey Seiten zusammengenommen größer, als die dritte Seite.

In dem Dreyecke ABC (Fig. 9.) ist $AB + BC > CA$; $BC + CA > AB$; $CA + AB > BC$.

Beweis. Die Wahrheit folget aus §. 6, I.

§. 17.

Zusatz. Wenn daher aus drey gegebenen geraden Linien ein Dreyeck gebildet werden soll, so müssen je zwey davon zusammen größer als die dritte seyn. Sind sie eben so groß, oder kleiner als die dritte Linie, so läßt sich aus ihnen kein Dreyeck construiren.

§. 18.

Zusatz. Auch muß in jedem Dreyecke der Unterschied je zweyer Seiten kleiner als die dritte, oder jede Seite größer als der Unterschied der zwey andern seyn.

In dem Dreyecke DEF (Fig. 10.) ist $EF - ED < DF$. Denn wenn man $EG = ED$ nimmt, so ist

auch EG + DF > EG + GF; woraus DF > GF, oder GF < DF folget. Ein Gleiches gilt von dem Unterschiede jedes Paars der übrigen Seiten.

Diese beyde Fälle müssen vermittelst der zu construirenden Hülfslinien durchgeführt werden.

§. 19.

Aufgabe. Aus drey gegebenen geraden Linien, welche die erfoderliche Eigenschaft (§. 17 u. 18.) haben, ein Dreyeck zu construiren.

Es seyen (Fig. 11.) a, b und c die gegebenen geraden Linien, und a + b > c; a + c > b, auch b + c > a. Man soll aus ihnen ein Dreyeck bilden.

Auflösung. Diese beruht darauf, daß man eine dieser Seiten als Grundlinie des zu construirenden Dreyecks annimmt, und aus ihren Endpuncten mit den zwey andern, als Halbmessern, Kreise beschreibt, welche auf jeder Seite der Grundlinie einen Durchschnittspunct geben. Hierdurch entstehen die Dreyecke M, N; O, P; R, S (in Fig. 12, 13, 14), die eigentlich nur ein einziges Dreyeck (in verschiedener Lage betrachtet) sind.

§. 19. *a.*

Anmerkung. I. Wenn (Fig. 11.) a die kleinste, b die mittlere und c die größte der gegebenen Linien ist, so erhellet die Möglichkeit, aus ihnen ein Dreyeck zu bilden, am bequemsten daraus, daß man untersucht, ob a + b > c ist. Hat dieses Statt, so muß nun auch a + c > b und b + c > a seyn.

II. Der Lehrer erläutere dieses durch Beyspiele in Zahlen.

§. 20.

Aufgabe. Aus drey gegebenen Linien (worunter zwey gleiche sind), welche die nöthige Beschaffenheit (§. 17 u. 18.) haben, ein gleichschenkeliges Dreyeck zu construiren.

Es seyen (Fig. 15) a und b die gegebenen Seiten zum gleichschenkeligen Dreyecke; auch a + a > b und b + b > a. Man soll aus ihnen ein gleichschenkeliges Dreyeck bilden.

Auflösung. Je nachdem man a oder b zur Grundlinie annimmt, entsteht auch ein anderes gleichschenkeliges Dreyeck. Ihre Construction ergiebt sich aus dem vorigen §. Man erhält entweder die Dreyecke M und N (Fig. 16.), oder O und P (Fig. 17.)

§. 21.

Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreyeck, dessen Seite eine gegebene Linie ist, zu construiren.

Es sey (Fig. 18.) a die gegebene Seite des zu bildenden Dreyecks.

Auflösung. Nach Anleitung der beyden vorigen §§. entsteht das Dreyeck M (Fig. 19.) oder auch N, welches mit jenem einerley und nur der Lage nach verschieden ist.

III. Congruenz der Dreyecke.

§. 22.

Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken eine Seite des einen gleich ist einer Seite des andern, der daranliegende Winkel und dessen anderer Schenkel in beyden ebenfalls gleich sind, so dek-ken sich beyde Dreyecke, und die übrigen drey Stücke des einen sind den zugehörigen Stücken des andern einzeln genommen gleich.

Es sey in den Dreyecken (Fig. 20.) ABC und DEF die Seite BC = EF, W. ABC = W. DEF und BA = ED, so decken sich die Dreyecke ABC und DEF. Und es ist AC = DF, W. BAC = W. EDF, und W. BCA = W. EFD.

Beweis. Wenn man die als gleich angenommenen Stücke gehörig in einander legt, so ergiebt sich das Decken der Dreyecke sehr leicht. Aus der bewiesenen Congruenz folget sodann wiederum die Gleichheit der drey übrigen Stücke.

§. 23.

Anmerkung. I. Der Lehrer lasse diesen Beweis nach allen möglichen Voraussetzungen der als gleich angenommenen Stücke durchführen. Da an jeder Dreyecksseite zwey Winkel liegen, so sind überhaupt sechs verschiedene Fälle der Hypothesis und der Thesis möglich, welche vortrefflich zur Uebung der Schüler dienen.

II. Auch kann der Beweis über die Richtigkeit des Lehrsatzes ohne das Ineinanderlegen der glei-

chen Stücke geführt werden, indem man leicht einsieht, daß das ganze Dreyeck verändert wird, wenn man einen Winkel oder einen der beyden Schenkel, welche ihn einschließen, verändert.

§. 24.

Zusatz. In jedem gleichschenkeligen Dreyecke sind die zwey Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Es sey ACB (Fig. 21.) ein gleichschenkeliges Dreyeck, worin CA = CB, so muß auch W. A = W. B seyn.

I. Die Wahrheit beruht darauf, daß man sich das nämliche Dreyeck ACB unter dem Dreyecke EDF noch einmal vorstellt, so, daß AC = CB = ED = DF, auch W. C = W. D ist, und durch gehöriges Ineinanderlegen derselben zeiget, daß W. A einmal den W. E und dann auch den W. F decket, woraus W. E = W. F = W. A = W. B folget.

II. Auch ergiebt sich die Gleichheit der W. A und B daraus, daß in dem Dreyecke ACB bey A alles gerade so ist, wie bey B. Aus dem nämlichen Grunde, woraus W. A größer oder kleiner als W. B wäre, folgte auch, daß W. B größer oder kleiner als W. A seyn müßte. Beydes zugleich aber ist unmöglich.

§. 25.

Zusatz. Wenn in einem Dreyecke drey gleiche Seiten sind, so hat es auch drey gleiche Winkel, d. h. es ist gleichwinkelig.

Es sey in dem Dreyecke MNR (Fig. 22.) MN = NR = RM, so ist W. R = W. M = W. N.

Denn aus MN = NR folgt W. R = W. M, und aus NR = RM folgt W. M = W. N.

§. 26.

Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken eine Seite des einen gleich ist einer Seite des andern, auch die an diesen Seiten anliegenden zwey Winkel in beyden Dreyecken einzeln genommen gleich sind, so decken sich die Dreyecke, und die übrigen gleichliegenden Stücke sind auch gleich.

Es sey in den Dreyecken ABC und DEF (Fig. 20.) die Seite BC = EF, der W. ABC = W. DEF und W. ACB = W. DFE, so sind die Dreyecke congruent, und es ist BA = ED, CA = FD, und W. BAC = W. EDF.

Beweis. Auch hier folgt aus dem gehörigen Ineinanderlegen der gleichen Stücke sehr leicht die Congruenz der Dreyecke.

§. 27.

Anmerkung. I. Rathsam ist es, diesen Beweis für jede andere Seite und den zwey daranliegenden Winkeln von den Schülern durchführen zu lassen. Ausser dem so eben betrachteten Falle (in §. 26.) sind noch zwey andere Annahmen möglich.

II. Auch kann der Beweis so geführt werden, daß man einsieht, wie bey Veränderung eines dieser drey Stücke das ganze Dreyeck verändert werde.

§. 28.

Zusatz. Wenn in einem Dreyecke an einer Seite zwey gleiche Winkel liegen, so stehen diesen Winkeln zwey gleiche Seiten gegenüber, d. h. das Dreyeck ist gleichschenkelig.

Es sey (Fig. 21.) an der Seite AB der W. A = W. B, so ist auch die Seite BC = Seite AC.

I. Denn wenn man sich das Dreyeck ACB noch einmal denkt unter der Gestalt des Dreyecks EDF, so daß AB = EF, W. A = W. B = W. E = W. F ist, so kann man jenes so in dieses legen, daß einmal AC in ED, dann auch AC in FD fällt. Daher müssen auch ED und FD, AC und BC gleich seyn.

II. Diese Wahrheit leuchtet ferner auch daraus ein, daß in dem Dreyecke ACB bey A Alles gerade so, wie bey B ist. Sollte also AC größer oder kleiner als BC seyn, so müßte auch BC größer oder kleiner als AC seyn, welches unmöglich ist.

§. 29.

Zusatz. Wenn in einem Dreyecke drey gleiche Winkel sind, so hat es auch drey gleiche Seiten, d. h. es ist ein gleichseitiges Dreyeck.

Es sey in dem Dreyecke MNR (Fig. 22.) W. N = W. M = W. R, so ist auch MR = RN = NM.

Denn aus W. N = W. M folgt RM = RN, und wegen W. M = W. R ist RN = MN.

§. 30.

Zusatz. Das gleichseitige Dreyeck ist folglich eine regelmäßige oder reguläre Figur, oder ein reguläres Dreyeck.

§. 31.

Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken die drey Seiten des einen einzeln genommen den drey Seiten des andern gleich sind, so decken sich beyde Dreyecke.

Wenn in Dreyecken (Fig. 20.) ABC und DEF die Seite AB = DE, BC = EF und CA = FD ist, so sind die Dreyecke congruent, und es ist W. C = W. F, W. A = W. D und W. B = W. E.

Beweis. Wenn man die beyden Dreyecke mit zwey ihrer gleichen Seiten so in einander legt, daß die denselben gegenüberliegenden Winkel auf entgegengesetzten Seiten dieser in einander fallenden Linien liegen, und nun beyde Winkelspitzen durch eine gerade Linie verbindet, so entstehen drey mögliche Lagen. In jedem dieser drey Fälle kann der Beweis, mit Hülfe des Satzes, daß im gleichschenkeligen Dreyecke die Winkel an der Grundlinie gleich sind, leicht geführt werden.

Wenn man die Dreyecke ABC und DEF so leget, daß die gleichen Seiten BC und EF in einander fallen, und die Scheitel A und D auf entgegengesetzter Seite von BC liegen, auch sodann von A nach D eine gerade Linie zieht, so entstehen die drey

Lagen von (Fig. 23, I, II und III.) woran der Beweis für die Congruenz der Dreyecke BAD und BDC leicht gefunden wird, durch die Hülfssätze in §. 24 und in §. 22.

§. 32.

Zusatz. I. Aus drey gegebenen Linien, als Seiten eines Dreyecks, kann man nur ein einziges Dreyeck bilden, obwohl es verschiedene Lagen haben kann.

II. Der Beweis des vorigen Lehrsatzes läßt sich auch dadurch führen, daß die Lage eines Punctes gegen die beyden Endpuncte einer gegebenen geraden Linie völlig bestimmt ist, sobald seine Abstände von jenen Puncten bestimmt sind.

III. Aus dem bisherigen (§. 22. 26. u. 31.) folget, daß

1. Zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel,
2. Eine Seite und die zwey darin liegenden Winkel,
3. Alle drey Seiten die Natur eines Dreyecks bestimmen.

§. 33.

Anmerkung. Aus Vergleichung der bisherigen drey Sätze von der Congruenz der Dreyecke mit der oben (§. 14.) angeführten Auflösung der Aufgabe: Ein Dreyeck zu construiren, ohne auf die Größe seiner Seiten Rücksicht zu nehmen, ergiebt sich eine lehrreiche Uebereinstimmung dieser Wahrheiten, welche der Lehrer den Schülern klar machen muß.

IV. Leichte Anwendungen von der Congruenz der Dreyecke.

§. 34.

Aufgabe. Man soll einen gegebenen geradlinigen Winkel halbiren.

Es sey ABC (Fig. 24.) der gegebene Winkel. Man soll die Lage einer geraden Linie BD finden, wodurch W. ABD = W. CBD wird.

Auflösung. Diese ergiebt sich leicht aus Betrachtung der in der Figur gezogenen Hülfslinien.

Beweis. Er beruht auf der Congruenz der Dreyecke BMR und BNR.

§. 35.

Zusatz. Daher kann man auch einen gegebenen Winkel in 4, 8, 16, 32 u. s. f. gleiche Theile, aber noch nicht in 3, 5, 7, 9 u. s. w. gleiche Theile eintheilen.

§. 36.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.

Es sey AB (Fig. 25.) die gegebene Linie. Man soll einen Punct D finden, wodurch AD = BD wird.

Auflösung. I. Durch zwey gleichseitige Dreyecke ACB und AFB.

II. Vermittelst zweyer gleichschenkeliger Dreyecke ARB und ASB (Fig. 26.)

III. Durch ein gleichschenkeliges Dreyeck ALB (Fig. 27.) und Halbirung des Winkels L an der Spitze.

Beweis. Sämmtliche Beweise sind leichte Folgen aus der Lehre von den congruenten Dreyecken.

§. 36. *a*.

Zusatz. Hierdurch kann auch jede gerade Linie in 4, 8, 16; aber noch nicht in 3, 5, 7 u. s. f. gleiche Theile getheilt werden.

§. 37.

Anmerkung. Da in allen Fällen: (Fig. 25, 26 u. 27.) die Linien CD, RD u. LD mit der gegebenen AB bey D zwey gleiche Nebenwinkel bilden, so ist jeder von ihnen (nach der bekannten Worterklärung in der Anschauungslehre) ein rechter Winkel. Dies führt zur Construction dieses Winkels in folgenden Aufgaben.

§. 38.

Aufgabe. In einer gegebenen geraden Linie ist ein willkührlicher Punct genommen. Man soll durch ihn eine gerade Linie dergestalt construiren, daß sie mit der gegebenen zwey gleiche Nebenwinkel bildet.

Es sey MN (Fig. 28.) die gegebene Linie, A der in ihr gewählte Punct. Man soll AB finden, wodurch W. MAB = W. NAB wird.

Auflösung. I. Diese ergiebt sich aus den Hülfslinien der Figur.

II. Eine zweyte Auflösung entspringt aus Betrachtung von (Fig. 29.)

Beweis. Ergiebt sich durch die Congruenz der Dreyecke.

§. 39.

Aufgabe. Von einem ausserhalb einer geraden Linie gegebenen Puncte eine gerade Linie so auf die gegebene zu ziehen, daß sie mit ihr zwey gleiche Nebenwinkel bildet.

Es sey AB (Fig. 30.) die gegebene gerade Linie, C der ausser ihr befindliche Punct. Man soll CE finden, wodurch W. CEA = W. CEB wird.

Auflösung. Sie ergiebt sich aus Betrachtung der Hülfslinien in (Fig. 30.) oder auch in (Fig. 31.)

Beweis. Beruht wieder auf Congruenz der Dreyecke.

§. 40.

Erklärung. Eine gerade Linie, welche auf einer andern geraden so errichtet ist, daß sie mit ihr zwey gleiche Nebenwinkel bildet, heißt bekanntlich eine senkrechte Linie oder ein Loth oder eine lothrechte Linie oder ein Perpendickel, und jeder dieser gleichen Nebenwinkel wird ein rechter Winkel (oder kurz: ein Rechter) genannt.

Sein willkührliches Zeichen ist R. Die Construction des rechten Winkels ist also hierdurch nachgewiesen. Eben so auch jene des spitzen und stumpfen Winkels, da jener kleiner, dieser größer als der rechte ist.

§. 41.

Lehrsatz. Die Summe zweyer Nebenwinkel beträgt immer zwey rechte Winkel.

Es seyen (Fig. 32.) ACE und ECB zwey Nebenwinkel, so sind sie zusammen zweyen Rechten gleich.

Auflösung und Beweis ergeben sich leicht aus Betrachtung der Figur durch die Hülfslinie CD.

§. 42.

Lehrsatz. Wenn die Summen zweyer Winkel, die einen gemeinschaftlichen Schenkel und Scheitel haben, zwey rechte Winkel beträgt, so bilden die beyden nicht gemeinschaftlichen Schenkel eine einzige gerade Linie, d. h. diese Winkel sind Nebenwinkel.

Es sey (Fig. 33.) W. ACD + W. DCB = 2 R, so sind diese Winkel Nebenwinkel, d. h. die Schenkel CA nnd CB bilden nur eine gerade Linie ACB.

Beweis. Gründet sich darauf, weil weder CM noch CN die Verlängerung der Linie AC seyn

kann, ohne der Annahme (W. ACD + W. DCB = 2 R) zu widersprechen.

§. 43.

Zusatz. Alle Winkel, welche in dem nämlichen Puncte einer geraden Linie ihren gemeinsamen Scheitelpunct haben, und auf einer Seite derselben liegen, sind zweyen rechten Winkeln gleich.

In (Fig. 34.) ist W. ACD + W. DCE + W. ECF + W. FCB = 2 R.

§. 44.

Zusatz. Wenn einer von zwey Nebenwinkeln ein spitzer ist, so muß der andere stumpf seyn, und umgekehrt. Denn jenem fehlt so viel an dem rechten, als dieser mehr beträgt als der rechte, und umgekehrt.

§. 45.

Lehrsatz. Jeder Winkel ist seinem gegenüberliegenden Scheitelwinkel gleich.

Wenn sich (Fig. 35.) die geraden Linien AB und DE in C schneiden, so ist W. ACD = W. ECB und W. ACE = W. BCD.

Beweis. Denn jeder Scheitelwinkel macht mit seinem anliegenden Nebenwinkel die nämliche Summe von zwey rechten Winkeln aus.

§. 46.

Zusatz. Wenn mehrere Winkel einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct haben, und rings um denselben herum liegen, so ist ihre Summe vier rechten Winkeln gleich.

Sämmtliche Winkel (Fig. 36.) ACD, DCE, ECB, BCG, GCF und FCA betragen zusammen vier rechte Winkel.

§. 47.

Lehrsatz. Der Aussenwinkel in jedem Dreyecke ist größer, als jeder der beyden innern im Dreyecke, wovon keiner sein Nebenwinkel ist.

Wenn ABC (Fig. 37.) das gegebene Dreyeck, und ACD der durch Verlängerung der Seite BC entstandene Aussenwinkel ist, so muß W. ACD > W. BAC, und W. ACD > W. ABC seyn.

Beweis. Daß W. ACD > W. BAC sey, fließt aus der Congruenz der Dreyecke AEB und CEF.

Daß aber auch W. ACD > W. ABC sey, ergiebt sich durch die Construction in (Fig. 38.), wo das Dreyeck AEB dem Dreyecke FEC congruent, folglich W. B = W. BCF = W. DCH ist.

§. 48.

Anmerkung. Der Beweis dieses wichtigen Satzes muß an allen möglichen Aussenwinkeln des gegebenen

Dreyecks geübt werden, damit der Schüler den Geist erfasse, und das Wesentliche vom Zufälligen unterscheiden lerne. Es sind zwölf verschiedene Fälle möglich.

§. 49.

Zusatz. In jedem Dreyecke müssen irgend zwey Winkel zusammengenommen kleiner, als zwey Rechte seyn.

In dem Dreyecke MNP (Fig. 39.) ist W. N + W. P, oder W. P + W. M, oder W. M + W. N $<$ 2 R.

Beweis. Beruht auf Vergleichung der Aussenwinkel mit den ihnen entgegenstehenden innern im Dreyecke nach §. 47 und auf §. 41.

§. 50.

Zusatz. I. Im rechtwinkeligen Dreyecke muß jeder der zwey andern Winkel ein spitzer seyn.

II. Auch im stumpfwinkeligen Dreyecke ist jeder der übrigen spitz.

III. Ein Dreyeck kann auch drey spitze Winkel haben. Nun heißt es spitzwinkelig.

IV. In Rücksicht der Winkel sind nur rechtwinkelige, spitzwinkelige und stumpfwinkelige Dreyecke möglich.

V. Das gleichseitige Dreyeck muß spitzwinkelig seyn.

VI. Das gleichschenkelige Dreyeck kann recht-, spitz- und stumpfwinkelig seyn

VII. Eben dieses gilt vom ungleichseitigen Dreyecke.

§. 51.

Zusatz. Von einem in einer gegebenen geraden Linie angenommenen Puncte giebt es nur ein Loth auf diese Linie. Eben so auch von einem ausserhalb der Linie gegebenen Puncte.

Wenn (Fig. 40.) CD und FE Lothe auf AB sind, so giebt es weder durch C noch durch F ein anderes Loth auf AB.

Die Hülfslinien führen leicht zum indirecten Beweise.

§. 52.

Zusatz. I. Wenn in dem gleichschenkeligen Dreyecke eine gerade Linie von der Spitze auf die Mitte der Grundlinie gezogen wird, so steht sie senkrecht auf ihr und halbirt den Winkel an der Spitze.

In (Fig. 41.) sey AB = AC, BD = CD, so ist W. ADB = W. ADC = R, auch W. BAD = W. CAD.

II. Ein Loth von der Spitze des gleichschenkeligen Dreyecks auf die Grundlinie, halbirt diese.

Wenn W. ADB = W. ADC ist, so muß auch BD = CD seyn.

III. Ein aus der Mitte der Grundlinie auf sie errichtetes Loth geht durch die Spitze des gleichschenkeligen Dreyecks, und halbirt den Winkel an der Spitze.

Wenn BD = CD, und DA ein Loth auf BC ist, so liegt in DA die Spitze des Dreyecks BAC, und es ist W. BAD = W. CAD.

IV. Eine Linie, welche im gleichschenkeligen Dreyecke den Winkel an der Spitze halbirt, halbirt auch, gehörig verlängert, die Grundlinie, und steht lothrecht auf ihr.

Wenn W. BAD = W. CAD, so ist auch BD = CD und W. ADB = W. ADC = R.

§. 53.

Lehrsatz. In jedem Dreyecke liegt gegen der größern Seite der größere Winkel über.

Es sey (Fig. 42.) in dem Dreyecke EDF die Seite DF > DE, so ist W. DEF > W. DFE.

Beweis. Wenn DG = DE genommen und EG gezogen wird, so ergiebt sich die Wahrheit des Satzes sehr leicht aus §. 24 u. §. 47.

§. 54.

Anmerkung. Es ist wichtig, diesen Beweis auch für die übrigen ungleichen Seiten eines ungleichseitigen Dreyecks von den Schülern führen zu lassen. Eine Folge daraus ist, daß in diesem ungleichseitigen Dreyecke der größten, mittlern und kleinsten Seite, auch der größte, mittlere und kleinste Winkel gegenüberliege.

§. 55.

Lehrsatz. In jedem Dreyecke steht auch dem größeren Winkel die größere Seite entgegen.

Es sey in dem Dreyecke NMP (Fig. 43.) W. N > W. P, so ist auch PM > NM.

Beweis. Dieser kann leicht direct durch die

gezogene Hülfslinie ND nach §. 28 u. §. 16; und indirect vermittelst §. 24 u. §. 53 geführt werden.

§. 56

Anmerkung. I. Auch diese Beweise müssen für die übrigen Winkel durchgeführt werden. Es ergiebt sich daraus, daß dem größten, mittleren und kleinsten Winkel im Dreyecke auch die größte, mittlere und kleinste Seite gegenüberliege.

II. Eben so erwiesen ist nun auch, daß in jedem Dreyecke der kleinern Seite der kleinere Winkel, und dem kleinern Winkel die kleinere Seite gegenüberliege.

III. Der Lehrer wird diese Sätze sehr nützlich auf rechtwinkelige und stumpfwinkelige Dreyecke anwenden.

§. 57.

Zusatz. Von einem Puncte ausserhalb einer geraden Linie ist die senkrechte auf sie die kürzeste; jede schiefe Linie aber um so größer, je schiefer sie ist.

Es sey (Fig. 44.) CD lothrecht auf AB, so ist $CD < CE$, $CE < CF$, $CF < CG$.

Der Beweis fließt leicht aus dem eben Erwiesenen und zwar direct, oder indirect.

§. 58.

Erklärung. Da man sich unter dem Abstande eines Puncts von einer geraden Linie die kürzeste Linie denkt, welche von ihm nach ihr möglich

ist, so bestimmt dieses Loth den Abstand des Puncts von der Linie.

§. 59.

Zusatz. Wenn von einem Puncte ausserhalb einer geraden Linie ein Loth auf sie gezogen ist, so giebt es von diesem Puncte auf jeder Seite des Lothes eine schiefe Linie, deren eine der andern gleich ist.

Wenn man (Fig. 44.) DH = DF macht, und CH und CF zieht, so ist CH = CF; setzt man DK = DG, so ist CK = CG. Die Ursache ist klar.

§. 60.

Zusatz. Auch giebt es von diesem Puncte ausser der Linie auf jeder Seite des Lothes nur eine schiefe Linie, welche entweder eine bestimmte Größe hat, oder mit jener ersten Linie einen bestimmten, spitzen oder stumpfen, Winkel bildet.

Wenn CK = CG eine bestimmte Größe hat, so giebt es von C nach AB keine andere gerade Linie mehr von dieser Größe. Wenn W. CKD = W. CGD bestimmt ist, so macht jede andere gerade von C nach AB einen andern Winkel mit ihr.

§. 61.

Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel des einen so groß ist, als eben diese

Stücke in einem andern Dreyecke, so sind beyde Figuren congruent.

Es sey in den Dreyecken (Fig. 45.) DEF und ABC die Seite EF = BC, W. DEF = W. ABC und W. D = W. A, so congruiren die Dreyecke.

Beweis. Denn es giebt von F und C nur eine Linie auf ED und BA, welche gleiche Winkel D = A bildet.

§. 62.

Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten und ein gegenüberliegender Winkel des einen, zweyen Seiten und dem ähnlich liegenden gegenüberstehenden Winkel des andern Dreyecks einzeln gleich sind, so decken sich die Dreyecke nicht immer, sondern man kann aus den angegebenen Stücken zweyerley Dreyecke bilden.

Wenn man sich in dem Dreyecke ABC (Fig. 46.) die Seiten BC und AB und den W. C als unveränderlich denkt, so läßt sich noch ein zweytes Dreyeck ADC bilden, welches mit dem Dreyecke ABC eine Seite AC, die zweyte Seite AD = AB und den W. C gemein hat.

Soll also in diesem Falle die Zweydeutigkeit gehoben werden, so muß man wissen, ob der W. ABC, welcher der Seite AC gegenüberliegt, ein stumpfer oder ein spitzer ist. Ist er stumpf, so giebt es aus AC, AB und W. C nur ein

stumpfwinkeliges Dreyeck ABC; ist er spitz, so kann aus AC, AB und W. C nur ein Dreyeck ADC construirt werden, welches aber in Bezug auf den Winkel DAC entweder recht- oder spitz- oder stumpfwinkelig seyn kann, wie sich leicht durch Zeichnungen erläutern läßt.

§. 63.

Anmerkung. I. Es ist sehr zu rathen, daß der Lehrer für die zwey vorhergehenden §§. sämmtliche Voraussetzungen an den gegebenen Dreyecken durchführen lasse, wodurch eine lehrreiche Uebung bezweckt wird.

II. Da jedes Dreyeck drey Seiten und drey Winkel hat, so sind durch das Vorhergehende folgende Resultate erwiesen:

1. Drey Seiten bestimmen die Natur eines Dreyecks,
2. Zwey Seiten und der dazwischen liegende Winkel ebenfalls,
3. Zwey Seiten und ein Winkel, welcher nicht der eingeschlossene ist, bestimmen zweyerley Dreyecke,
4. Eine Seite und die zwey daran liegenden Winkel bestimmen nur ein Dreyeck,
5. Eine Seite, ein anliegender, und ein ihr entgegenstehender Winkel ebenfalls,
6. Drey Winkel bestimmen nicht ein Dreyeck, sondern (man sehe unten §. 199 u. §. 203, I.) unzählig vielerley Dreyecke.

V. Die Lehre von den Parallellinien.

§. 64.

Aufgabe. An einem Puncte, der in einer geraden Linie gegeben wird, einen Winkel zu bilden, der einem gegebenen gleich ist.

Es sey (Fig. 47.) MN die gegebene gerade Linie und M der in ihr genommene Punct. Man soll einen Winkel NMP construiren, der dem gegebenen Winkel CDB gleich ist.

Auflösung. Diese beruht auf der Construction der beyden congruenten gleichschenkeligen Dreyecke AMR und EDG.

§. 65.

Aufgabe. Wenn zwey gerade in einerley Ebene liegende Linien durch eine dritte so geschnitten werden, daß ein äusserer Winkel dem zugehörigen innern gleich ist, so sind auch die Wechselwinkel gleich, und die Summe der beyden innern Winkel beträgt zwey Rechte.

Es werden die Linien AB (Fig. 48.) und CD von der schneidenden EF in G und H durchschnitten, und es sey der äussere W. EGB = dem innern W. EHD, so sind auch die Wechselwinkel gleich, oder W. AGF = W. EHD und die Summen der innern Winkel, d. h. W. BGH + W. GHD = 2 R.

Beweis. Denn Scheitelwinkel sind einander gleich (§. 45.) und zwey Nebenwinkel betragen zusammen zwey rechte Winkel (§. 41.)

Eben daher folgt auch, daß W. AGH + W. CHG = 2 R.

§. 66.

Zusatz. Umgekehrt: Wenn die beyden innern Winkel zwey Rechte betragen, so sind auch

die Wechselwinkel und die äussern Winkel den innern gleich.

Desgleichen: Wenn die Wechselwinkel gleich sind, so betragen die innern Winkel zwey Rechte, und die äussern Winkel sind den innern gleich.

Die Erläuterung und der Beweis folgt leicht aus (Fig. 48.)

§. 67.

Lehrsatz. Wenn zwey gerade, in der nämlichen Ebene liegende Linien von einer dritten so durchschnitten werden, daß die Summe der innern Winkel zwey Rechte beträgt, so können jene Linien, bey jeder Verlängerung nach beyden Seiten, niemals zusammenlaufen.

Es sey (Fig. 48.) W. BGH + W. GHD = 2 R, so können die geraden Linien AB und CD, wenn sie gleich über B und D oder über A und C ohne Ende verlängert werden, nie zusammentreffen.

Beweis. Denn wenn sie gegen B und D zusammenliefen, so entstände über der Grundlinie GH ein Dreyeck, worin zwey Winkel (bey G und H) zwey Rechte betrügen. Ein Gleiches gilt für die Verlängerung über A und C. (§. 49.)

§. 68.

Zusatz. Wenn zwey gerade, von einer dritten durchschnittene Linien gleiche innere und äussere

Winkel, oder gleiche Wechselwinkel bilden, so können sie ebenfalls, auf jeder Seite verlängert, nie zusammtreffen.

Erläuterung an Fig. 48.

§. 69.

Anmerkung. Daß diese gerade Linien Parallellinien oder gleichlaufende Linien heißen, ist, so wie auch die Bedeutung der seither genannten Winkel, schon aus der Anschauungslehre bekannt. In der Wissenschaftslehre mußte aber sowohl die Möglichkeit jener Linien, als auch die Bedingungen ihres Gleichlaufens nachgewiesen werden.

§. 70.

Lehrsatz. Wenn zwey gerade, in einerley Ebene liegende Linien von einer dritten so durchschnitten werden, daß die Summe der innern Winkel auf einer Seite der schneidenden kleiner als zwey Rechte ist, so müssen jene Linien, hinlänglich verlängert, auf dieser Seite einmal zusammentreffen.

Es werden (Fig. 49.) die geraden Linien AB und CD von EF in G und H so geschnitten, daß W. BGH + W. GHD < 2 R, so müssen die Linien GB und HD, über B und D genugsam verlängert, einmal zusammenlaufen.

Beweis. Wenn man durch G eine Linie GN leget, so daß W. NGH + W. GHD = 2 R, so muß GB zwischen GN und HD fallen, auch GN mit

HD gleichlaufend seyn. Da sich nun diese GB immer mehr von GN entfernt, und immer näher gegen HD rückt, so folgt aus dieser Richtung der geraden Linie GB und aus ihrer Lage gegen HD, daß beyde sich einmal durchschneiden werden.

§. 71.

Anmerkung. Für Freunde einer etwas strengern Darstellung theile ich Folgendes mit. I. Wenn (Fig. 49.) W. BGH + W. GHD < 2 R, so muß einer dieser Winkel < R seyn. Es sey W. GHD < R, so denke man sich von G auf HD ein Loth Ga von a auf GB ein Loth ab, von b auf HD das Loth bc, von c auf GB das Loth cd und so abwechselnd die Lothe de, ef, fg u. s. w.

II. Hier ist leicht zu zeigen, daß Ga > ab, ab > bc, bc > cd, cd > de sey u. s. f. Auch wird man finden, daß, wenn z. B. zwischen b und d ein willkührlicher Punct α genommen und aus diesem ein Loth auf HD gefällt wird, dieses Loth $\alpha\beta$ zwischen c und e eintreffen, auch $\alpha\beta$ < bc und $\alpha\beta$ > de seyn müsse.

III. Daher nährt sich die GB in jedem Puncte von G bis f immer mehr der Linie HD. Wenn aber eine gerade Linie einer andern geraden näher rückt, so lehrt die aus der Anschauung hervorgehende Natur der geraden Linie, daß sie einmal zusammenlaufen müssen.

§. 71. *a*.

Anmerkung. Daß diese Beweise den strengen Forderungen, welche man an eine vollkommen berichtigte Theorie der Parallelen macht, nicht entsprechen, wird nicht geläugnet. Aber eben so unwidersprechlich ist es,

daß kein bis jetzt erschienenes System ein vollkommen befriedigendes ist. Daher beruht jede Parallelentheorie in der That auf Gründen der Anschauung, die allerdings unwiedersprechlich sind. Dies ist die Ursache, warum hier der einfachste Weg allen künstlichen, die doch nicht mehr leisten, vorgezogen worden ist. Wer sich weiter hierüber belehren will, lese meine Critik der Parallelentheorie. Jena, b. Cröker 1807, worin siebenzehn verschiedene Versuche dargestellt und critisch geprüft worden sind.

§. 72.

Zusatz. Auch wenn der äussere Winkel größer, als sein innerer, oder der eine Wechselwinkel dem andern ungleich ist, so müssen die geraden Linien auf der Seite, wo der größere äussere oder der kleinere Wechselwinkel liegt, einmal zusammenlaufen.

Es sey W. EGB > EHD, oder W. AGH > GHD, so müssen GB und HD, über B und D hinreichend verlängert, einmal zusammenlaufen.

Denn jetzt ist die Summe der innern Winkel kleiner als zwey rechte.

§. 73.

Lehrsatz. Wenn zwey gerade, in der nemlichen Ebene liegende Linien so von einer dritten durchschnitten werden, daß entweder die Summe der innere Winkel größer als zwey Rechte, oder der äussere Winkel kleiner als sein innerer, oder ein Wechselwinkel kleiner, als der

andere ist, so müssen die Linien auf der Seite der beyden innern Winkel, oder des größern innern, oder des größern Wechselwinkels auseinanderlaufen.

Wenn (Fig. 49.) W. AGH + CHG > 2 R, oder W. EGA < W. EHC, oder W. BGH < W. GHC, so sind die Linien GA und HC nach dieser Richtung auseinanderlaufend.

Beweis. Denn sie müssen, da unter diesen Bedingungen die Summe der innern Winkel BGH und DHG weniger als zwey Rechte beträgt, gegen GB und HD zusammenlaufende seyn.

§. 74.

Aufgabe. Durch einen Punct ausserhalb einer gegebenen geraden Linie eine andere gerade zu ziehen, welche mit der gegebenen gleichlaufend ist.

Es sey CD (Fig. 48.) die gegebene Linie, und G der gegebene Punct. Man soll die mit CD gleichlaufende AGB finden.

Auflösung Beruht darauf, daß, nachdem man durch G die willkührliche schneidende Linie EGF gezogen hat, W. EGB = W. EHD gemacht wird.

§. 75.

Zusatz. Durch einen gegebenen Punct ausserhalb einer geraden Linie kann es nur eine einzige gleichlaufende mit ihr geben.

Wenn (Fig. 49.) MGN mit CD gleichlaufend ist, so kann weder AGB noch LGQ gleichlaufend mit ihr seyn.

§. 76.

Zusatz. Wenn zwey Parallelen von einer dritten willkührlich geschnitten werden, so beträgt die Summe der innern Winkel zwey Rechte, der äussere Winkel ist dem innern gleich, und die Wechselwinkel sind gleich.

Die Parallellinien AB und CD (Fig. 48.) werden von EF in den willkührlichen Puncten G und H geschnitten, so ist W. BGH + W. GHD = 2 R, W. EGB = W. EHD und W. AGH = W. GHD.

Denn wenn dies nicht wäre, so könnten die Linien nicht gleichlaufend seyn.

§. 77.

Lehrsatz. Zwey Parallellinien haben in allen Puncten einerley Abstand von einander, oder sind gleichweit abstehende Linien.

Es sey (Fig. 50.) DE mit FG gleichlaufend, A und B zwey willkührliche Puncte in DE, auch AC und BH zwey Lothe auf FG, so ist AC = BH.

Beweis. Wenn man die Querlinie BC zieht, so sind die Dreyecke BAC und CHB congruent, weil die zwey Paare an BC liegende Wechselwinkel einander gleich sind.

§. 78.

Zusatz. Alle Linien, welche von einer Parallele ausgehen und auf der andern senkrecht stehen, sind auch lothrecht auf der ersten.

Wenn AC (Fig. 50.) und BH auf FG senkrecht sind, so ist auch W. CAB = W. HBA = R.

§. 79.

Zusatz. Wenn zwey Parallellinien von zwey andern Parallelen in vier Puncten geschnitten werden, so sind ihre gegenüberliegende Stücke gleich.

Es werden (Fig. 51.) die Parallelen AB und CD von den Parallelen EF und GH in den Puncten L, N, O und M geschnitten, so ist LN = MO und LM = NO.

Beydes wird klar, wenn man die Querlinie LO zieht.

VI. Die Vierecke und ihre verschiedene Arten.

§. 80.

Aufgabe. Ein Quadrat zu construiren, wovon eine Seite gegeben ist.

Man soll (Fig. 52.) über die Linie AB ein Quadrat construiren.

Auflösung. Man verlängere BA willkührlich nach E, errichte aus A das Loth AC = AB, ziehe CB und trage das Dreyeck CAB nach CDB, so ist ABDC das verlangte Quadrat.

Beweis. Dieser folgt leicht aus den Sätzen von den Parallellinien.

§. 81.

Aufgabe. Eine Raute zu construiren, wenn ihre Seite und ein spitzer (oder stumpfer) Winkel gegeben ist.

Auflösung. Es sey AB (Fig. 53.) die gegebene Seite und BAC der gegebene Winkel, so wird nach dem vorigen §. die Raute GHLM leicht zu construiren seyn.

§. 82.

Aufgabe. Ein Rechteck zu construiren, wozu zwey Seiten gegeben sind.

Auflösung. Wenn AB und CD (Fig. 54.) die gegebenen Seiten sind, so wird nach dem Vorigen, das Rechteck MOQP sogleich construirt werden können.

§. 83.

Aufgabe. Eine Rhomboide zu construiren, wovon zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Auflösung. Es seyen (Fig. 55.) AB und CD die Seiten, EFG der gegebene Winkel, so wird aus diesen Stücken die Rhomboide MNOP nach Anleitung des Vorigen, leicht construirt werden.

§. 84.

Aufgabe. Ein Paralleltrapez zu construiren.

Auflösung. Aus Verbindung der Endpuncte (Fig. 56.) A und C, B und D zweyer ungleichen Parallelen AB und CD durch die geraden AC und BD entspringt die verlangte Figur ABDC.

§. 85

Aufgabe. Ein Trapez zu construiren.

Auflösung. Es entsteht, wenn die Endpuncte D und F (Fig. 57.) E und G zweyer nicht gleichlaufenden ungleichen Linien DE und FG durch gerade Linien DF und EG verbunden werden. Doch darf die Summe der Winkel D und E, oder F und G keine zwey Rechte betragen.

§. 86.

Lehrsatz. Es kann nur viererley Arten von Parallelogrammen geben.

Beweis. Der Begriff des Parallelogramms (der aus der Anschauungslehre bekannt ist) verbunden mit den kurz vorhergehenden Sätzen, führt leicht zum Beweise.

§. 87.

Lehrsatz. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonallinie in zwey congruente Dreyecke getheilt.

Beweis. Folget leicht aus Betrachtung von Fig. 52, 53, 54 und 55.

§. 88.

Zusatz. Eben so klar ist es, daß man aus zwey gegebenen congruenten Dreyecken, welche gehörig an einander gelegt werden, ein Parallelogramm bilden kann. Dies kann sehr leicht durch Zeichnungen erläutert werden.

§. 89.

Lehrsatz. Wenn man in der Diagonallinie eines Parallelogramms einen willkührlichen Punct annimmt, und durch denselben mit zwey, einen Winkel einschliesenden Seiten des Parallelogramms zwey gleichlaufende Linien zieht, so sind die beyden kleinen Parallelogramme, wodurch die Diagonallinie nicht geht, gleich groß an Fläche.

Es sey (Fig. 58.) ABDC das gegebene Parallelogramm, BC die Diagonale, E der willkührliche Punct, IEG mit AB und FEH mit AC gleichlaufend, so ist das Parallelogramm AFEI dem Parallelogramme EGDH an Fläche gleich.

Beweis. Ergiebt sich leicht aus dem Satze, daß die Diagonale das Parallelogramm halbire.

§. 89. *a*.

Anmerkung. I. Da die Parallelogramme AFEI und EGDH gleiche Flächen, aber verschiedene Gestalt haben, so sind sie nicht congruent sondern blos gleich.

II. Nähme man den Punct E in der Mitte von BC, so entständen zwey congruente Parallelogramme, wie sich leicht erweisen läßt.

III. Wäre das gegebene Parallelogramm ein Quadrat, und man nähme E nicht in der Mitte der Diagonallinie, so entstehen zwey ungleiche Quadrate und zwey congruente Rechtecke.

VII. Die drey Winkel im Dreyecke. Maaß der Winkel.

§. 90.

Lehrsatz. In jedem Dreyecke ist die Summe der drey Winkel zweyen Rechten gleich.

Es sey (Fig. 59.) ABC das gegebene Dreyeck so ist W. ABC + W. BCA + W. CAB = 2 R.

Beweis. Folget entweder aus der durch A mit BC parallel gezogenen DE, oder aus der mit BA gleichlaufenden CH und der nach I verlängerten BC.

§. 91.

Zusatz. Der Aussenwinkel an jedem Dreyecke ist der Summe der beyden innern entgegenstehenden Winkel des Dreyecks gleich.

In (Fig. 59.) ist W. ACI = W. CAB + W. ABC.

Der Beweis muß, zur Uebung für die Schüler, an allen möglichen Aussenwinkel geführt werden.

§. 92.

Zusatz. In dem gleichseitigen Dreyecke ist jeder Winkel = $\frac{2}{3}$ R.

§. 93.

Zusatz. I. In dem rechtwinkeligen Dreyecke ist die Summe der zwey spitzen Winkel = R. Folglich ist der eine um so viel kleiner als der halbe Rechte, als der andere größer als ein halber Rechter ist.

II. In dem gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreyecke ist jeder spitze Winkel = $\frac{1}{2}$ R.

§. 94.

Grundsatz. Jede Linie kann, als stetige Größe, in irgend eine beliebige Menge gleicher Theile eingetheilt werden. Dieser Satz spricht aber nur die Möglichkeit einer solchen Theilung, nicht aber ihre wirkliche Darstellung aus.

§. 95.

Erklärung. Man nehme an, ein Quadrant der Kreisperipherie sey in 90 gleiche Theile getheilt, und nenne einen dieser Theile einen Grad, so enthält der Halbkreis 180 und der ganze Umfang 360 solcher Grade. Anstatt des Worts: Grad, setzt man eine kleine Nulle oben zur Rechten, und schreibt also 90°, 180°, 360°. Den Grad denkt man sich wieder in 60 gleiche Theile abgetheilt, und nennt einen dieser Theile eine Minute. Der Minute sechzigster Theil heißt Secunde. Die Zeichen der Minuten und Secunden sind ′ und ″; z. B. 18′ (achtzehn Minuten) oder 34″ (vier und dreyßig Secunden.)

§. 96.

Erklärung. Aus dem Puncte C (Fig. 60.) der geraden AB sey mit dem Halbmesser CE der Halbkreis EFN beschrieben, uud in C das Loth CF errichtet, so ist EHF = FMN, d. h. jeder Bogen ist ein Quadrant. Wenn nun der kleine Bogen ED einen Grad, d. h. den 90sten Theil des Quadranten EHF vorstellt, so ist klar, daß hier 90 solcher Bogen von E in EHF bis zu F liegen. Denkt man sich nun von ihren sämmtlichen Endpuncten gerade Linien nach dem Mittelpuncte C, so entstehen an diesem Puncte C 90 kleine Winkel, deren jeder dem kleinen Winkel ECD gleich ist. Auch wird die Ebene des Quadranten aus der Summe dieser 90 kleinen Winkel bestehen. Gesetzt nun, der Bogen EDH enthielte 46 kleine Bogen ED, d. h. 46 Grade, so würden auch 46 kleine Winkel ECD in der Winkelfläche EGH enthalten seyn. Gleichwie also der Gradbogen ED den Bogen EHF ausmißt, so würde auch der Gradwinkel ECD den Winkel ECH ausmessen, und man kann sagen, der Gradwinkel ECD sey das Maaß des Winkels ECH. Da aber die Zahl dieser Gradwinkel der Zahl der Gradbogen vollkommen gleich ist, so sagt man, der Winkel ECH werde durch den Bogen EDH zwischen seinen Schenkeln gemessen. Hieraus ist klar, inwiefern Bogen das Maaß der Winkel seyn können, obgleich Bogen und Winkel verschiedenartige Größen sind.

§. 97.

Zusatz. Da der Grad der 90te Theil des Viertelkreises ist; diese Viertelkreise aber größer oder kleiner sind, je nachdem sie mit größern oder kleinern Halbmessern beschrieben werden, so sind auch die Grade in größern Kreisen größer, in kleinern Kreisen kleiner. Demungeachtet sind alle Winkel, zwischen deren Schenkel Bogen von gleichvielen Graden liegen, einander gleich, obwohl diese Grade ungleich sind.

Es sey (Fig. 61.) W. ACH = R, W. PCH < R, und mit den ungleichen Halbmessern CE und CB die Quadranten EID und BMA beschreiben, so zählt der Bogen EI so viele Grade des kleinen Quadranten, als der Bogen BM nach dem größern enthält; d. h. wenn EI z. B. der dritte Theil von EID wäre, so müßte BM der dritte Theil von BMA seyn. — Desgleichen würden auch die Bogen FN und GO Drittheile von den ihnen zugehörigen Quadranten seyn.

Daher kann jeder zwischen den Schenkeln eines Winkels mit willkührlichem Halbmesser beschriebene Bogen als das Maaß dieses Winkels angesehen werden.

§. 98.

Zusatz. I. Alle Nebenwinkel haben 180° zu ihrem Maaße. Wenn man den einen in Graden kennt, so ist auch der andere; oder, wenn es mehrere sind, die Summe der übrigen bekannt.

II. Alle Winkel, welche rings um einen gemeinschaftlichen Punct herumliegen, haben 360° zum Maaße.

III. Wenn man von zwey Paar Scheitelwinkeln nur einen Winkel kennt, so sind alle übrige in Graden bekannt.

§. 99.

Zusatz I. Die drey Winkel eines jeden Dreyecks sind zusammen = 180°. Denn jeder rechte Winkel ist = 90°.

II. Wenn man in einem Dreyecke einen in Graden gegebenen Winkel von 180° abzieht, so bleibt die Summe der beyden andern Winkel übrig; und wenn man die Summe zweyer Winkel von 180° wegnimmt, so bleibt der dritte Winkel zum Reste.

III. Im gleichschenkeligen Dreyecke findet man aus einem in Graden gegebenen Winkel jeden der zwey übrigen. Wird der Winkel an der Spitze von 180° abgezogen und der Rest halbirt, so ist diese Hälfte der Winkel an der Grundlinie. Zieht man aber den doppelten Winkel an der Grundlinie von 180° ab, so bleibt der Winkel an der Spitze übrig.

IV. Im gleichseitigen Dreyecke ist jeder Winkel = 60 Grade.

V. Im rechtwinkeligen Dreyecke betragen die zwey spitzen Winkel zusammen 90°. Ist der eine gegeben, so wird der andere leicht gefunden.

VI. Im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreyecke ist jeder spitze Winkel = 45°.

§. 99. *a*.

Anmerkung. Es ist sehr rathsam, diese Sätze (§. 98 u. 99.) mit den Schülern in Rechnungs-Beyspielen durchzuüben. Man kann den Winkeln willkührliche Größen in Graden und Minuten geben.

§. 100.

Aufgabe. Durch den Endpunct einer geraden Linie ein Loth auf dieselbe zu errichten.

Die Linie AB (Fig. 62.) ist gegeben. Man soll durch A ein Loth auf sie construiren.

Auflösung. Das gleichseitige Dreyeck ACB, und CD = BC führt zum Zwecke.

Beweis. W. DAB = 60° + 30° = 90°.

VIII. Gleichheit der Parallelogramme und Dreyecke, und ihre Verwandlung.

§. 101.

Lehrsatz. Zwey Parallelogramme, welche gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, sind gleich am Flächeninhalte.

Es seyen (Fig. 63.) ABDC und EFHG zwey Parallelogramme, worin CD = GH und die Höhe AM = EL ist, so muß die Fläche ABDC der Fläche EFHG gleich seyn.

Beweis Wenn die Parallelogramme mit ihren gleichen Grundlinien in einander, und sie selbst auf einerley Seite dieser Grundlinien in einerley Ebene gelegt werden, so sind drey verschiedene Lagen

(Fig. 64. 65. und 66.) möglich, aus deren näherer Betrachtung sich die Wahrheit des Lehrsatzes ergiebt.

§. 102.

Anmerkung. Da diese Parallelogramme verschiedene Gestalten haben, und dennoch einerley Flächen, so sind sie in der Größe übereinstimmende, d. h. gleiche, aber nicht congruente Figuren.

§. 103.

Zusatz. Nach dieser Aufgabe ist es leicht, ein Parallelogramm zu construiren, welches mit einem gegebenen gleiche Höhe, Grundlinie und Fläche hat, aber dessen zwey Seitenlinien einen angegebenen Winkel bilden. Auch kann jede Rhomboide hierdurch in ein ihr gleiches Rechteck verwandelt werden.

§. 104.

Zusatz. I. Wenn zwey Parallelogramme gleiche Flächen und einerley Grundlinien haben, so müssen auch ihre Höhen gleich seyn.

II. Haben sie aber bey gleichem Inhalte gleiche Höhe, so müssen auch ihre Grundlinien gleich seyn.

Beydes kann, nachdem die Parallelogramme gehörig in einander gelegt worden sind, leicht indirect bewiesen werden.

§. 105.

Lehrsatz. Zwey Dreyecke, welche einerley Grundlinien und Höhen haben, sind gleich am Flächeninhalte.

Es seyen (Fig. 67.) ABC und DBC die gegebenen Dreyecke, welche die Grundlinie BC und, weil ihre Spitzen A und D in einer mit BC gleichlaufenden Linie ADG liegen, auch die Höhe gemein haben, so sind beyde übereinstimmend in der Größe.

Beweis. Ergiebt sich leicht aus den in der Figur gezogenen Hülfslinien.

§. 106.

Zusatz. I. Wenn zwey gleiche Dreyecke einerley Grundlinie haben, so muß auch ihre Höhe gleich seyn, d. h. die gerade Linie, welche ihre Spitze verbindet, muß gleichlaufend mit der Grundlinie seyn.

II. Haben aber gleiche Dreyecke einerley Höhe, so müssen sie auch gleiche Grundlinien haben.

Der indirecte Beweis ist leicht zu führen.

§. 107.

Zusatz. Auch ergiebt sich hieraus, daß jedes Dreyeck in ein ihm gleiches verwandelt werden kann, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe, aber einen bestimmt gegebenen Winkel an der Grundlinie hat.

§. 108.

Zusatz. Ein Dreyeck, welches mit einem Parallelogramm einerley Grundlinie und Höhe hat, ist die Hälfte von ihm; umgekehrt ist jedes Parallelogramm noch einmal so groß, als ein Dreyeck von der nämlichen Grundlinie und Höhe.

§. 109.

Zusatz. Daher ist es leicht, ein gegebenes Parallelogramm in ein ihm gleiches Dreyeck von der nämlichen Höhe, oder ein gegebenes Dreyeck in ein gleichgroßes Parallelogramm von einerley Höhe zu verwandeln.

§. 110.

Zusatz. Desgleichen kann jedes gegebene Dreyeck und Parallelogramm leicht in 2, 4, 8, 16 u. s. f. gleiche Theile getheilt werden, wenn man die gehörigen, leicht zu findenden zieht.

§. 111.

Aufgabe. Ein jedes Dreyeck in ein ihm gleiches Parallelogramm zu verwandeln, wovon eine Seite und ein Winkel gegeben ist.

Man soll (Fig. 68.) das Dreyeck ABC in ein Parallelogramm verwandeln, dessen Seite = QR, und dessen Winkel = W. PQR ist.

Auflösung. Beruht darauf, ein Parallelogramm DFNL zu construiren, worin das kleinere DECH dem andern CGNM und jedes dem Dreyecke ABC gleich ist. Auch muß MN der gegebenen Seite QR und CMN dem gegebenen Winkel PQR gleich seyn.

§. 112.

Zusatz. Hieraus folgt die Methode, jede vielseitige geradlinige Figur in ein Parallelogramm zu verwandeln, wovon eine Seite und ein Winkel gegeben ist.

Gesetzt, es wäre (Fig. 69.) ABCDEF diese Figur, so kann sie durch Diagonalen AE, BE, CE, in Dreyecke getheilt werden, welche man einzeln in Parallelogramme verwandeln kann, deren Summe das verlangte Parallelogramm bilden.

§. 113.

Zusatz. Auch kann die gegebenene mehrseitige Figur zuerst in ein Dreyeck, und sodann dieß Dreyeck in das verlangte Parallelogramm verwandelt werden.

Um das Fünfeck (Fig. 70.) ABCDE in ein Dreyeck zu verwandeln, ziehe man AG mit BE, so wie auch CF mit BD gleichlaufend, verlängere die DE in G, die ED in F, und ziehe die BG und BF, so ist, wie man leicht einsieht, BGF das verlangte Dreyeck. Auf ähnliche Weise läßt sich jedes andere geradlinige Vieleck durch bloße Construction in ein ihr gleiches Dreyeck verwandeln.

§. 114.

Zusatz. Weil das Rechteck nur eine Gattung der Parallelogramme ist, so kann man durch den vorigen §. jedes geradlinige Vieleck in ein Rechteck verwandeln, wovon eine Seite gegeben ist.

§. 115.

Lehrsatz. In jedem rechtwinkeligen Dreyecke ist das Quadrat der Hypotenuse so

groß, als die Quadrate der beyden Catheten zusammengenommen.

Es sey ABC (Fig. 71.) das rechtwinkelige Dreyeck, ADFC das Quadrat der Hypotenuse, AMNB und BCGL die Quadrate der Catheten, so ist ADFC = AMNB + BCGL.

Beweis. Wenn aus B das Loth BE auf DF gefällt wird, so ist das Rechteck ADEH dem Quadrate AMNB gleich, denn das Dreyeck ADB ≡ Dreyeck MAC ist die Hälfte jenes Rechtecks und dieses Quadrats.

§. 116.

Anmerkung. Dieser Satz, welcher von seinem Erfinder Pythagoras, der pythagorische Lehrsatz genannt wird, ist einer der wichtigsten in der ganzen Mathematik. Er läßt sich noch auf vielfache Art beweisen. Da die Auffindung dieser Beweise eine sehr wirksame Verstandesübung ist, so fügen wir die Figuren 72, 73 und 74 bey, und überlassen es dem Scharfsinne der Anfänger, aus den construirten Hülfslinien die Beweise aufzufinden. ABC ist immer das gegebene rechtwinkelige Dreyeck.

§. 117.

Zusatz. Wenn in einem Dreyecke die Quadrate zweyer Seiten zusammengenommen so groß sind, als das Quadrat der dritten Seite, so ist der dieser dritten Seite entgegenstehende Winkel ein rechter.

Es sey in dem Dreyecke ABC (Fig. 75.) AC^q (d. h. das Quadrat über AC) = $AB^q + BC^q$, so ist W. ABC = *R*.

Denn wenn man BD = BC auf AB senkrecht errichtet und AD ziehet, so ergiebt sich leicht, daß AC = AD, folglich das Dreyeck ABC dem Dreyecke ABD congruent sey.

Auch kann dieser Beweis indirect geführt werden.

§. 118.

Zusatz. Soll man daher zwey gegebene Quadrate in ein einziges verwandeln, so setze man ihre Seiten rechtwinkelig zusammen und ziehe die Hypotenuse, so ist ihr Quadrat das verlangte.

§. 119.

Zusatz. Auch kann sehr leicht ein Quadrat gefunden werden, welches 2, 3, 4, 5, 6mal u. s. w. so groß, als ein gegebenes ist.

§. 120.

Zusatz. Desgleichen kann jede gegebene Menge von Quadraten leicht in ein einziges verwandelt werden.

§. 121.

Zusatz. Wenn man vom Quadrate der Hypotenuse das Quadrat der einen Cathete hinwegnimmt, so bleibt das Quadrat der andern Chathete übrig. Darauf gründet sich die Methode, ein Quadrat zu construiren, welches dem Unterschiede zweyer gegebenen Quadrate gleich ist.

§. 122.

Zusatz. I. Auf gleiche Weise kann man leicht ein Quadrat finden, welches der Hälfte eines gegebenen gleich ist. Auch läßt sich $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ u. s. w. eines gegebenen Quadrates wieder durch ein Quadrat darstellen.

II. Wie man aber andere Theile eines Quadrates, z. B. $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$ u. s. f. wieder als Quadrate construiren kann, läßt sich erst weiter unten überzeugend einsehen.

IX. Die Sehnen und Tangenten des Kreises.

§. 123.

Lehrsatz. I. Ein Loth aus dem Mittelpuncte des Kreises auf eine willkührliche Sehne in ihm, halbirt diese Sehne.

II. Eine gerade Linie, welche aus dem Mittelpuncte nach der halben Sehne gezogen wird, steht lothrecht auf ihr.

III. Ein aus der Mitte der Sehne errichtetes Loth geht, in seiner Verlängerung, durch des Kreises Mittelpunct.

Es sey (Fig. 76.) AEBD der gegebene Kreis und AB die Sehne, so ist

1. Für W. CFB = W. CFA = R, die BF = AF.

II. Für BF = AF (wenn CF gezogen wird) W. CFB = W. CFA = R.

III. Für BF = AF und W. BFC = W. AFC = R liegt des Kreises Mittelpunct in der verlängerten FC.

Beweis. Ergiebt sich sogleich, nachdem die Halbmesser CB und CA gezogen sind.

§. 124.

Zusatz. Hierdurch ist es leicht, in einem gegebenen Kreise den Mittelpunct zu finden, und zwar auf doppelte Weise.

Dies erläutert (Fig. 77.) Hier liegt der Mittelpunct sowohl im Durchschnittspuncte der Lothe FN und GM, als auch in der Mitte des Durchmessers LH.

§. 125.

Lehrsatz. Wenn man in jedem Schenkel eines gegebenen Winkels einen beliebigen Punct annimmt und aus diesen Puncten, nach des Winkels Oeffnung hin, zwey Lothe auf die Schenkel errichtet, so müssen sich diese, in ihrer Verlängerung, einmal durchschneiden.

Es sey ACB (Fig. 78) der gegebene Winkel, E und D die willkührlichen Puncte, EF, DG die beyden Lothe auf AC und BC, so müssen sich diese in L schneiden.

Beweis. Wenn eine gerade Linie von E nach

D gezogen wird, so sind die zwey innern Winkel kleiner, als zwey Rechte.

§. 126.

Aufgabe. Durch drey gegebene Puncte, welche nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Es seyen (Fig. 79.) A, B und C diese Puncte. Man soll eine Kreislinie finden, welche durch sie alle geht.

Auflösung und Beweis ergeben sich leicht aus Betrachtung der Hülfslinien.

§. 127.

Zusatz. I. Da die drey Puncte jedes Dreyecks nicht in gerader Linie liegen, so kann man jedes Dreyeck in einen Kreis einschließen, der durch dessen drey Winkelpuncte geht.

II. Wenn man aus der Mitte der drey Seiten eines Dreyecks drey Lothe auf diese Seiten errichtet, und sie gehörig verlängert, so müßen sie sich alle drey in einem Puncte durchschneiden.

§. 128.

Zusatz. Drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen nur einen einzigen Kreis.

§. 129.

Zusatz. Zwey Kreise können einander nur in zwey Puncten durchschneiden.

§. 130.

Lehrsatz. Wenn man die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreyecks halbirt, so ist ihre Hälfte der Halbmesser eines Kreises, welcher, aus dem Theilungspuncte beschrieben, durch des Dreyecks drey Winkelpuncte geht.

Es sey ABC (Fig. 80.) das gegebene rechtwinkelige Dreyeck und E der Mittelpunct der Hypotenuse, so ist EA = EB = EC.

Beweis. Wenn AB halbirt, das Loth DE und die gerade EB gezogen wird, so ergiebt sich die Wahrheit des Satzes sogleich.

§. 131.

Zusatz. Man kann also über die Hypotenuse jedes rechtwinkeligen Dreyecks einen Halbkreis beschreiben, in welcher der Scheitel des rechten Winkels liegt, und die Endpuncte seiner Catheten stehen beyderseits auf dem Ende des Durchmessers jenes Kreises, der um das Dreyeck beschrieben werden kann.

§. 132.

Lehrsatz. Wenn man von den zwey Endpuncten des Durchmessers eines Kreises nach einem willkührlichen Puncte seines Umfangs zwey gerade Linien zieht, so ist der daselbst entstehende Peripheriewinkel ein rechter.

Es sey AB (Fig. 81.) der Durchmesser eines

Kreises, D ein willkührlicher Punct des Umfangs, so ist W. ADB = *R*.

Beweis. Wenn CD gezogen wird, so sieht man leicht, daß die beyden Winkel bey D der halben Summe der Nebenwinkel bey C gleich seyn müssen.

§. 133.

Zusatz. I, Ein Peripheriewinkel, der mit seinen Schenkeln auf einem kleinern Bogen als der Halbkreis steht, ist ein spitzer Winkel.

II. Ein Peripheriewinkel, welcher zwischen seinen Schenkeln einen größern Bogen, als der Halbkreis, befaßt, ist ein stumpfer Winkel.

Beydes ergiebt sich leicht aus (Fig. 82.) worin W. DEB < *R* und W. FEB > *R* seyn muß, da W. AEB = *R* ist.

§. 133. *a*.

Zusatz. Vermittelst der Sätze in §. 132 u. in §. 115 läßt sich jedes gegebene Rechteck in ein ihm gleiches Quadrat verwandeln. Es sey EFCH (Fig. 71.) das Rechteck, so verlängere man CH bis CA = CF, beschreibe über AC, gegen B hin, einen Halbkreis, verlängere EH bis zu seinem Durchschnitte in B und ziehe CB, so ist Quadrat BCGL = Rechteck EFCH.

§. 133. *b*.

Zusatz. Durch Hülfe dieser Auflösung (vor. §.) und eines frühern (§. 144.) kann jede gerad-

linige Figur durch geometrische Construction in ein ihr gleiches Quadrate verwandelt werden.

§. 133. c.

Erklärung. Diese Verwandelung einer gegebenen geradlinigen Figur in ein ihr gleiches Quadrat, nennt man die Quadratur geradliniger Figuren.

§. 134.

Lehrsatz. I. Sehnen, welche in gleichen Kreisen gleiche Entfernung vom Mittelpuncte haben, sind gleich;

II. Gleiche Sehnen sind gleichweit vom Mittelpuncte entfernt;

III. Eine Sehne, welche entfernter vom Mittelpuncte ist, ist die kleinere;

IV. Eine kleinere Sehne ist vom Mittelpunct entfernter.

Wenn (Fig. 83.) AB, DE, FG die gegebenen Sehnen und die Lothe CL, CM, CN ihre Entfernungen vom Mittelpuncte sind, so ist

I. Für CL = CM, die AB = DE.

II. Für AB = DE wird CL = CM.

III. CN > CM giebt GF < DE und

IV. Für GF < DE wird CN > CM.

Beweis. Ergiebt sich leicht aus den rechtwinkeligen Dreyecken CLA, CME, CNF durch Anwendung des pythagorischen Lehrsatzes.

§. 135.

Zusatz. I. Eine Sehne, welche dem Mittelpuncte immer näher rückt, wird größer, und wenn sie durch den Mittelpunct geht, ist sie die größte Sehne, d. h. ein Durchmesser.

II. Entfernt sich die Sehne mehr von dem Mittelpuncte, so wird sie kleiner und muß, in der Entfernung des Halbmessers, verschwinden.

§. 136.

Lehrsatz. In jedem Kreise gehören:

I. Zu gleichen Sehnen gleiche Bogen;

II. Zu gleichen Bogen gleiche Sehnen;

III. Zur kleinern Sehne der kleinere Bogen;

IV. Zum kleinern Bogen die kleinere Sehne;

V. Zur größern Sehne der größere Bogen;

VI. Zum größern Bogen die größere Sehne.

Es sey, (in Fig. 83.)

I. Sehne AB = Sehne DE, so ist Bogen AVB = Bogen DWE;

II. Wenn Bog. AVB = Bog. DWE, so ist S. AB = S. DE.

III. S. FG < S. DE, so ist Bog. FSG < Bog. DWE;

IV. Bog. FSG < Bog. DWE, so ist S. FG < S. DE;

V. S. DE > S. FG, so ist Bog. DWE > Bog. FSG;

VI. Bog. DWE > Bog. FSG, so ist S. DE > S. FG.

Beweis. Folgt leicht aus den Winkeln an dem Mittelpuncte, die theils gleich, theils ungleich sind.

§. 137.

Lehrsatz. I. Eine gerade Linie, welche auf dem Halbmesser eines Kreises an seinem Endpuncte lothrecht steht, hat nur diesen einen Punct mit dem Umfange des Kreises gemein.

II. Eine gerade Linie, welche am Ende des Halbmessers mit ihm einen spitzen Winkel bildet, fällt in den Kreis und wird, gehörig verlängert, eine Sehne.

I. Wenn (Fig. 84.) die AD in B auf CB senkrecht ist, so liegen alle Puncte derselben, den Punct B ausgenommen, ausserhalb der Peripherie.

II. Wenn aber W. CBH < R ist, so wird die verlängerte BH zur Sehne BG.

Beweis. I. Ergiebt sich daraus, daß CE > BC seyn muß; II. aber daraus, daß das Loth CH in den Kreis fallen muß, weil W. CBH < R ist.

§. 138.

Anmerkung. Hierdurch ist der (aus der Anschauungslehre bekannte) Begriff der Tangente oder der Berührungslinie geometrisch begründet.

§. 139.

Aufgabe. An jeden gegebenen Punct in dem Umfange eines Kreises eine Tangente zu construiren.

Der Kreis BFLGB und der Punct B (Fig. 84.) sey gegeben. Man soll für B die Tangente finden.

Auflösung und Beweis fließen unmittelbar aus vorhergehendem Lehrsatze.

§. 140.

Zusatz. I. Durch jeden Punct in der Peripherie eines Kreises kann nur eine Tangente construirt werden. Denn auf den dahin gezogenen Halbmesser giebt es nur ein Loth

II. Wenn man aus dem Berührungspuncte der Tangente und des Kreises ein Loth auf sie errichtet, so muß dieses, gehörig verlängert, durch den Mittelpunct gehen.

§. 141.

Aufgabe. Von einem ausserhalb eines Kreises gegebenen Puncte eine Tangente an dessen Umfang zu ziehen.

Es sey (Fig. 85.) aus C mit CD einen Kreis beschrieben, und ausser ihm ein Punct A gegeben, woraus die Tangente gefunden werden soll.

Auflösung. Wenn man AC, und FB durch D auf sie lothrecht zieht, mit CA den Kreisbogen MAN beschreibt, welcher die Puncte F und B bestimmt, und sodann FC und BC zieht, so sind AG und AE zwey Tangenten.

Beweis. Folgt aus Congruenz der Dreyecke.

§. 142.

Anmerkung. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe ergiebt sich leicht aus (Fig. 86). Sie zu finden und ihre Richtigkeit zu erweisen, ist eine lehrreiche Uebung für Anfänger.

§. 143.

Zusatz. I. Die zwey Tangenten, welche von einem Puncte ausserhalb des Kreises an dessen Umfange gezogen werden, fassen immer einen kleineren Bogen, als der Halbkreis ist, zwischen sich.

II. Je näher dieser Punct ausserhalb gegen den Kreis rückt, desto kleiner wird der zwischen den Tangenten liegende Bogen. Für AD (Fig. 85.) = O fällt G und E in D zusammen, und aus zwey Tangenten wird nun eine, nämlich FDB.

III. Entfernt sich aber A immer mehr von D, so wird Bogen GDE immer größer, bleibt aber stets kleiner als der Halbkreis.

§. 144.

Zusatz. I. Der Winkel, welchen die Tangente mit dem Bogen bildet, ist kleiner als jeder anzugebende spitze Winkel.

II. Der Winkel aber, welcher von dem Bogen und dem Halbmesser gebildet wird, ist größer als jeder anzugebende spitze Winkel.

X. Von den Mittelpunkts- und Peripheriewinkeln.

§. 145.

Lehrsatz. Wenn in einem Kreise ein Mittelpunctswinkel und ein Peripheriewinkel mit ihren Schenkeln auf dem nämlichen Bogen stehen, so ist jener noch einmal so groß, als dieser.

Es sey (Fig. 87.) in dem aus D mit DB beschriebenen Kreise der W. ADC ein Mittelpuncts-, der W. ABC ein Peripheriewinkel, welche beyde auf dem nämlichen Bogen AC stehen, so ist W. ADC = 2 W. ABC.

Der Beweis für diese Lage und für die noch möglichen zwey andern Lagen (Fig. 88 u. 89.) ergiebt sich leicht aus aufmerksamer Betrachtung der Hülfslinien.

§. 146.

Zusatz. Jeder Peripheriewinkel hat folglich die Hälfte des Bogens zwischen seinen Schenkeln zum Maaße. (§. 97.)

§. 147.

Zusatz. Zwischen parallelen Sehnen eines Kreises sind gleiche Bogen enthalten.

Es sey (Fig. 90.) AB und DE gleichlaufend, so ist der Bogen AD dem Bogen BE gleich. Dies ergiebt sich leicht, nachdem die Hülfslinie DB gezogen ist.

§. 148.

Zusatz. Alle Peripheriewinkel, welche auf einerley Kreisbogen stehen, sind gleich.

§. 149.

Zusatz. Ein Winkel, der mit seinem Scheitel ausserhalb des Kreises liegt und mit den Endpuncten seiner Schenkel auf einem Bogen dieses Kreises steht, hat den halben Unterschied der beyden zwischen seinen Schenkeln liegenden Kreisbogen zum Maaße.

Es sey (Fig. 91.) ABD der gegebene Winkel, so hat er die Hälfte des Unterschiedes der Bogen AD und EF zum Maaße.

Dies ist sogleich einleuchtend, wenn EG mit BD gleichlaufend auch CA und CG gezogen wird.

§. 150.

Zusatz. Wenn der Scheitel eines Winkels innerhalb der Ebene des Kreises liegt, so hat er die halbe Summe der zwey Bogen zu seinem Maaße, wovon der eine zwischen seinen gegebenen Schenkeln, der andere aber zwischen seinen rückwärts verlängerten Schenkeln liegt.

Es sey ABD (Fig. 92.) der gegebene Winkel, so ist der halbe Bogen AD nebst dem halben Bogen EF sein Maaß.

Dies leuchtet sogleich ein, wenn die EG mit BA gleichlaufend und dann noch CG und CD gezogen wird.

XI. Regelmäßige Vielecke.

§. 151.

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Viereck, d. h. ein Quadrat zu construiren.

Mit dem Halbmesser CD (Fig. 93.) sey der Kreis DBEA beschrieben. Man soll ein Quadrat in denselben construiren.

Auflösung. Wenn die Endpuncte zweyer senkrecht auf einanderstehenden Durchmesser mit Sehnen verbunden werden, so ergiebt sich die Auflösung und der Beweis sehr leicht.

§. 152.

Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu construiren.

Es sey ADBE (Fig. 94.) der gegebene Kreis, um welchen ein Quadrat construirt werden soll.

Auflösung. Wenn durch die vier Endpuncte zweyer sich lothrecht schneidenden Durchmesser vier Tangenten gezogen werden, so entsteht das verlangte Quadrat.

§. 153.

Zusatz. Das in einen Kreis beschriebene Quadrat ist die Hälfte des um denselbigen Kreis construirten Quadrats.

Aus Vergleichung der Fig. 93 und 94 wird der Beweis leicht gefunden.

§. 154.

Aufgabe. In einen Kreis ein regelmäßiges Achteck zu beschreiben.

In den mit CE (Fig. 95.) beschriebenen Kreis soll ein reguläres Achteck beschrieben werden.

Auflösung und Beweis ergeben sich leicht aus genauer Betrachtung der Figur.

§. 155.

Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Achteck zu construiren.

Um den mit CD (Fig. 96.) beschriebenen Kreis ein regelmäßiges Achteck zu beschreiben.

Auflösung. Die Linie CA und die durch den Punct D gezogene Tangente MDN bahnt den Weg zur Auflösung und zum Beweise.

§. 156.

Zusatz. Hieraus ist nun klar, wie man sowohl in als um den Kreis ein regelmäßiges 16, 32, 64 Eck u. s. f. construiren kann.

§. 157.

Zusatz. I. Die Fläche jedes einzelnen dieser in den Kreis beschriebenen Vielecke ist kleiner, jedes um denselben beschriebenen aber größer, als die Ebene des Kreises.

II. Das sowohl in als um den Kreis beschriebene regelmäßige Vieleck von noch einmal so viel Seiten kömmt der Kreisfläche näher, als das ihm entsprechende Vieleck von halb so viel Seiten.

§. 158.

Zusatz. I. Der Umfang jedes dieser in den Kreis construirten Vielecke ist kleiner, als des Kreises Umfang; der Umfang jedes um denselben beschriebenen Vielecks aber größer, als die Kreisperipherie.

II. Der Umfang des sowohl in als um den Kreis beschriebenen Vielecks von noch einmal so viel Seiten, kömmt dem Umfange des Kreises näher als der Umfang des ihm entsprechenden Vielecks von halbsoviel Seiten.

§. 159.

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein reguläres Dreyeck zu beschreiben.

Das regelmäßige Dreyeck soll in den mit CA (Fig. 97.) beschriebenen Kreis construirt werden.

Auflösung. Man errichte auf AC das Loth CB, beschreibe über CB das gleichseitige Dreyeck

CBE, halbire W. BCE durch CD; ziehe AG, so ist diese die Seite des verlangten Dreyecks.

Beweis. Denn nach der Construction ist der Winkel ACG = 120°, folglich Bogen AFG = 240° und Bogen AF = Bogen FG auch = 120°.

§. 160.

Aufgabe. Um einen Kreis ein regelmäßiges Dreyeck zu beschreiben.

Der gegebene Kreis sey AFBA (Fig. 98.) und C dessen Mittelpunct.

Auflösung. Man ziehe von C durch die drey Seiten des in den Kreis beschriebenen regulären Dreyecks die Lothe CA, CB und CF, und durch A, B und F, die sich in D, E und G schneidenden Tangenten GD, DE und EG.

Beweis. Ergiebt sich durch die Hülfslinien CD, CE und CG.

§. 161.

Anmerkung. Die Construction des regelmäßigen Dreyecks ist hier nach der Construction des regulären Vierecks gelehrt worden, weil diese etwas einfacher ist, als jene.

§. 162.

Aufgabe. In den Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben.

Der gegebene Kreis sey ABDA (Fig. 99.)

Auflösung. Man halbire die Seite des regulären Dreyecks AD in I, ziehe CI, verlängere

sie in E, und ziehe AE, DE, so sind diese zwey Seiten des Sechsecks.

Beweis. Man sieht leicht, daß AE = ED wird.

§. 163.

Zusatz. Die Seite des regelmäßigen Sechsecks in dem Kreise ist seinem Halbmesser gleich. Denn W. ACD = 120°; folglich W. ACE = 60° und auch (nach §. 99, III.) W. CAE = W. CEA = 60°. Daher CA = AE.

§. 164.

Zusatz. I. Dies giebt eine sehr bequeme Methode, in einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben.

II. Auch erleichtert es die Construction des regulären Dreyecks in dem Kreise.

§. 165.

Aufgabe. Um den Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben.

Es sey (Fig. 100.) mit dem Halbmesser CA ein Kreis beschrieben, um welchen das verlangte Sechseck construirt werden soll.

Auflösung. Wenn man aus C auf die Seiten DB, BL, LM des regelmäßigen Sechsecks in dem Kreise die Lothe CE, CP, CN zieht, sie in A, F, H verlängert, und durch diese Puncte Tangenten construirt, so ist DFG die Seite des zu findenden Sechsecks.

Beweis. Ergiebt sich leicht aus den Hülfslinien CD und CG.

§. 166.

Anmerkung. Aus den bisherigen Auflösungen ist klar, daß die in den Kreis und um den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecke entweder gegenüberliegende gleichlaufende Seiten haben, oder nicht. Bey allen diesen Vielecken, deren Seitenzahl eine gerade ist, hat ein solcher Parallelismus Statt; bey den übrigen aber nicht.

§. 167.

Zusatz. Hieraus folgt, daß sich sowohl in als um den Kreis reguläre Vielecke von 6, 12, 24, 48, 96 Ecken u. s. w. beschreiben lassen; und es ist klar, daß sie sowohl am Inhalte der Kreisfläche, als auch am Umfange seiner Peripherie immer näher kommen, je mehr Seiten sie haben.

§. 168.

Zusatz. Auch nähert man sich durch jedes folgende regelmäßige Doppeleck der Kreisebene mehr als um die Hälfte des Unterschiedes, der zwischen dem nächstvorhergehenden regulären Vielecke und dem Kreise Statt gefunden hat.

Es sey AD (Fig. 99.) die Seite des regulären Dreyecks, AE = DE jene des regelmäßigen Sechsecks in dem Kreise mit CA. Errichtet man in A und D die Lothe AM und DN, bis sie von einer Tangente durch E in M und N geschnitten werden, so ist Dreyeck EID = $\frac{1}{2}$ Rechteck EIDN; aber die

Fläche EIDhE > Dreyeck EID; folglich auch Dreyeck AED > $\frac{1}{2}$ Abschnitt AfEhD, woraus die Wahrheit des Satzes hervorgeht.

§. 169.

Anmerkung. Ausser diesen beyden Reihen von regulären Vielecken (in §. 156 u. §. 167.) deren geometrische Construction hierdurch nachgewiesen ist, giebt es noch andere Vielecke, welche zum Theil nicht rein geometrisch construirt werden können. Dahin gehört das regelmäßige Siebeneck, Neuneck, Eilfeck u. s. w. Doch giebt es eine theoretisch-practische Methode, diese Vielecke zu verzeichnen, welche sich auf die Berechnung der Mittelpuncts- und Vieleckswinkel (deren Begriff aus der Anschauungslehre bekannt ist) gründet, wovon nun das Wichtigste angeführt werden soll.

§. 170.

Aufgabe. Die Größe des Mittelpunctswinkels in jedem regulären Vielecke nach Graden zu finden.

Auflösung. Man dividire 360° durch die Zahl der Vielecksseiten. Der Quotient ist der Centriwinkel.

Die Richtigkeit leuchtet von selbst ein.

§. 171.

Zusatz. Daher ist der Centriwinkel im regelmäßigen Dreyecke = 120°, im Vierecke = 90°, im Fünfecke = 72°, im Sechsecke = 60°, im Siebenecke = 51° $\frac{3}{7}$, im Achtecke = 45°, im Neunecke =

40°, im Zehnecke = 36°, im Eilfecke = 32° $\frac{8}{11}$, im Zwölfecke = 30° u. s. w.

§. 172.

Zusatz. Wenn man an dem Mittelpunct eines gegebenen Kreises vermittelst des Transporteurs (eines Werkzeugs, dessen Vorrichtung und Gebrauch der Lehrer seinen Schülern hier erklären muß) den, einem darin zu beschreibenden regulären Vielecke, zukommenden Centriwinkel legt, so ist es leicht, in jeden gegebenen Kreis irgend ein reguläres Vieleck zu construiren. Diese practische Uebungen sind den Anfängern sehr zu empfehlen.

§. 173.

Aufgabe. Die Größe des Vieleckswinkels in jedem regulären Vielecke nach Graden zu bestimmen.

Auflösung. Wenn man den Centriwinkel dieses Vielecks von 180° abzieht, so bleibt der Polygonwinkel übrig.

Die Ursache davon ist leicht zu finden.

§. 174.

Zusatz. Hierdurch findet man den Polygonwinkel im regulären Dreyecke = 60°, im Vierecke = 90°, im Fünfecke = 108°, im Sechsecke = 120°, im Siebenecke = 128° $\frac{4}{7}$, im Achtecke = 135°, im Neunecke = 140°, im Zehnecke = 144°, im Eilfecke = 147° $\frac{3}{11}$, im Zwölfecke = 150° u. s. w.

§. 175.

Zusatz. Wenn man an beyde Endpuncte einer als Vielecksseite gegebenen geraden Linie, durch Hülfe des Transporteurs, den halben Polygonwinkel eines zu construirenden regulären Vielecks trägt, die beyden Schenkel bis zum Durchschneiden verlängert, aus diesem Durchschnittspuncte mit einem dieser Schenkel einen Kreis beschreibt, so kann jene Linie, als Seite des zu findenden Vielecks, in diesem Kreise herumgetragen werden. — Auch diese Auflösung soll practisch geübt werden.

§. 176.

Zusatz. Aus dem Bisherigen ergiebt sich nun leicht die Wahrheit folgender Sätze:

I. Jedes reguläre Vieleck hat einen Mittelpunct, d. h. einen Punct, der von allen seinen Winkelpuncten gleichweit absteht.

II. Dieser Mittelpunct wird gefunden, wenn man zwey nebeneinanderliegende Polygonwinkel halbirt, und die Theilungslinien bis zum Durchschnitte verlängert.

III. Aus diesem Mittelpuncte kann man mit einer geraden, bis zum Scheitelpuncte eines Polygonwinkels gezogenen Linie einen Kreis beschreiben, der durch alle übrige Scheitelpuncte der Vieleckswinkel geht, und folglich das Vieleck umschließt.

IV. Auch kann mit einem Lothe aus dem Mittelpuncte auf eine Vielecksseite ein Kreis beschrieben werden, der alle andere Vielecksseiten inwendig be-

rührt, und von dem Vielecke **eingeschlossen** wird

V. Durch gerade Linien, welche aus dem Mittelpuncte des Vielecks nach allen Scheitelpuncten der Polygonwinkel gezogen werden, wird das Vieleck in so viele congruente Dreyecke getheilt, als es Seiten hat.

VI. Daher ist auch jedes reguläre Vieleck an Fläche einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie der Summe aller Vielecksseiten und dessen Höhe einem Lothe gleich ist, welches vom Mittelpuncte des Vielecks auf eine Vielecksseite gezogen wird.

XII. Aehnlichkeit der Dreyecke.

§. 177.

Erklärung. Eine Größe, welche mehrmal zu sich selbst gesetzt, einer andern, ihr gleichartigen, gleich wird, heißt das **Maaß** derselben. Bestimmen, wie oft eine kleinere Größe in der größern enthalten ist, heißt **Messen**. Wenn eine Größe in mehreren andern dergestalt enthalten ist, daß kein Rest bleibt, wenn man alle größere durch die kleinere mißt, so wird sie ihr **gemeinschaftliches Maaß** genannt.

Es ist zweckmäßig, diese Begriffe durch **gerade Linien** anschaulich zu machen. Daher dieses dem Lehrer sehr empfohlen wird.

§. 178.

Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien von willkührlicher Größe gegeben sind, so läßt sich eine dritte gerade Linie denken, welche ohne bemerkbaren Fehler das gemeinschaftliche Maaß von beyden ist.

Beweis. Entweder ist die kleinere der beyden Linien selbst das genaue Maaß der größern, oder nicht. Im ersten Falle ist die Behauptung für sich klar. Im zweyten Falle halbire man die kleinere Linie, so ist vielleicht diese Hälfte das Maaß der größern; wo nicht, so halbire man die Hälfte, so ist vielleicht der vierte Theil dieses Maaß. Denkt man sich so die kleinere Linie in 8, 16, 32, 64 u. s. f. gleiche Theile getheilt, so wird eines dieser Theilchen einmal als das Maaß der größern Linie ohne bedeutenden Fehler anzusehen seyn. Denn der Rest bey dem Messen muß immer kleiner als das Maaß seyn. Das Maaß selbst kann aber hier, durch fortgesetztes Halbiren, ins Unendliche verkleinert werden. Folglich auch jener Rest.

Auch diesen Satz erläutere der Lehrer durch Linien.

§. 179.

Anmerkung. I. Da die folgenden Sätze nicht ohne einige Kenntniß von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen verstanden werden können, so muß hier das Wichtigste davon vorgetragen werden.

II. Für Schüler, welchen die Lehre von den Proportionen noch gänzlich unbekannt ist, muß der Lehrer Alles durch Zahlenbeyspiele erläutern. Andern dienen diese wenige §§. zur nützlichen Wiederholung.

§. 180.

Erklärung. I. Die Vergleichung zweyer gleichartigen Größen, wodurch man bestimmt, wie vielmal die eine größer, als die andere ist, heißt das *geometrische Verhältniß* dieser Größen. Das Zeichen desselben ist dieses :, und a : b heißt so viel als: *a verhält sich zu b*, oder 3 : 12 so viel als: 3 *verhält sich zu* 12.

II. Die Größen, welche das Verhältniß bilden, werden dessen *Glieder* genannt.

III. Die Zahl, welche bestimmt, wie oft das kleine Glied in dem größern enthalten ist, heißt der *Exponent* des Verhältnisses. Dieser Exponent ist daher nichts als der Quotient einer Division.

IV. Verhältnisse, welche gleiche Exponenten haben, sind *gleiche Verhältnisse*. Im Gegentheile heißen sie *ungleiche Verhältnisse*, wovon eines das *größere*, das andere das *kleinere* ist.

Erläuterungen durch Zahlen und Linien müssen alles dieses dem Anfänger klar machen.

§. 181.

Erklärung. I. Wenn zwey gleiche geometrische Verhältnisse zusammengestellt werden, so entsteht eine *geometrische Proportion*.

II. Sie besteht aus vier Gliedern, welche der Ordnung nach das erste, zweyte, dritte und vierte heißen. Was äussere und innere Glieder sind, erklärt sich von selbst.

III. Diese vier Glieder werden verhältnißmäßige oder proportionale Glieder genannt, und man sagt, daß sich das erste Glied so zum zweyten verhalte, wie sich das dritte Glied zum vierten verhält.

IV. Wenn a, b, c und d diese vier proportionirte Glieder sind, so wird die Proportion, welche sie bilden, folgendergestalt bezeichnet: a : b = c : d. Man sagt: a verhält sich zu b, wie sich c zu d verhält, oder auch rückwärts: d verhält sich zu c, wie sich b zu a verhält.

Erläuterungen in Zahlen und Linien müssen dies vollkommen aufklären.

§. 182.

Zusatz. Wenn zwey Verhältnisse, einzeln genommen, einem dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich, und bilden eine Proportion.

Erläuterung.

§. 183.

Grundsatz. Da das Verhältniß jedes Paares gleichartiger Größen durch Zahlen bestimmt wird, so können alle Verhältnisse und Proportionen in Zahlen dargestellt werden.

§. 184.

Erklärung. Wenn das erste Glied kleiner als das zweyte ist, so heißt es ein Verhältniß vom Kleinen zum Großen; umgekehrt, ein Verhältniß vom Großen zum Kleinen. Sind beyde Glieder gleich, so ist es ein Verhältniß der Gleichheit; sind sie ungleich, ein Verhältniß der Ungleichheit.

Erläuterungen.

§. 185.

Zusatz. I. Wenn eine Proportion aus zwey Verhältnissen der Ungleichheit vom Kleinen zum Großen besteht, so ist das zweyte Glied ein Product aus dem ersten in den Exponenten, und das vierte Glied ein Product aus dem dritten in den Exponenten.

II. Enthält aber die Proportion Verhältnisse vom Großen zum Kleinen, so ist das erste Glied ein Product aus dem zweyten, das dritte Glied ein Product aus dem vierten in den Exponenten.

Erläuterungen.

§. 186.

Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion ist das Product aus dem ersten Gliede in das vierte, dem Producte aus dem zweyten Gliede in das dritte gleich.

Beweis. Man kann durch Hülfe des vorigen §. leicht zeigen, daß diese Producte aus gleichen Factoren bestehen, folglich gleich seyn müssen.

Erläuterungen.

§. 187.

Zusatz. In jeder geometrischen Proportion verhält sich auch das erste Glied zum dritten, wie das zweyte Glied zum vierten.

Beweis. Denn das zweyte und vierte Glied sind entweder die Gleichvielfachen oder die gleichvielten Theile des ersten und dritten.

Erläuterungen.

§. 188.

Zusatz. Wenn man das erste und zweyte, oder das erste und dritte, oder das zweyte und vierte, oder das dritte und vierte Glied einer geometrischen Proportion mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt, so bilden die vier neuen Glieder wieder eine Proportion.

Beweis und Erläuterung geben sich leicht.

§. 189.

Zusatz. Wenn die gleichnamigen Glieder mehrerer Proportionen d. h. alle erste, alle zweyte, alle dritte und alle vierte Glieder mit einander multiplicirt werden, so bilden diese Producte auch eine Proportion, welche eine zusammengesetzte

Proportion genennt wird. Jedes ihrer Verhältnisse heißt ein zusammengesetztes.

Beweis und Erläuterungen.

§. 190.

Zusatz. Wenn zwey Producte gleich sind, deren jedes aus zwey Factoren besteht, so kann man aus diesen vier Factoren eine geometrische Proportion bilden, worin die Factoren des einen Products die innern, die Factoren des andern Products die äussern Glieder sind.

Erläuterung.

§. 191.

Zusatz. Wenn mehrere gleiche geometrische Verhältnisse gegeben sind, so verhält sich die Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweyten Glieder, wie jedes erste Glied zu seinem zweyten.

Beweis nebst Erläuterungen.

§. 192.

Aufgabe. Wenn irgend drey Glieder einer geometrischen Proportion gegeben sind, und das vierte feht, dieses fehlende zu finden.

Auflösung. I. Ist das fehlende ein äusseres, so wird das Product der innern Glieder durch das vorhandene äussere dividirt;

II. Fehlt aber ein inneres Glied, so dividire man das Product der äussern Glieder durch das

vorhandene innere. In beyden Fällen ist der Quotient das gesuchte Glied.

Beweis nebst Erläuterungen ergeben sich leicht (aus §. 186.)

§. 193.

Lehrsatz. Wenn zwey Dreyecke einerley Höhe haben, so verhalten sie sich, in Ansehung ihrer Flächen, wie ihre Grundlinien.

Wenn die Dreyecke ABC (Fig. 101.) und ADC gleiche Höhe haben, so verhält sich Dr. ABC : Dr. ADC = BC : CD.

Beweis. Die Wahrheit beruht darauf, daß man BC und CD mit einerley Maaß ausmessen (§. 178.) folglich die Dreyecke ABC und ADC in so viele gleiche Theile theilen kann, als Maaßtheile in BC und DC sind (§. 105.)

Erläuterung. Wäre z. B. BC : CD = 1 : 2, oder = 1 : 3, oder = 1 : 5, so wäre auch Dr. ABC : Dr. ADC = 1 : 2, oder = 1 : 3, oder = 1 : 5 u. s. w.

§. 194.

Lehrsatz. Parallelogramme von gleichen Höhen verhalten sich, in Rücksicht ihrer Fläche, wie ihe Grundlinien.

Wenn (Fig. 102.) ABDC und EFGD Parallelogramme von gleicher Höhe sind, so verhält sich jenes zu diesem wie CD : DG.

Beweis. Denn wenn man die Querlinien BC und EG zieht, so ist Dr. BCD : Dr. EDG = CD : DG, und das Doppelte verhält sich, wie das Einfache.

§. 194. *a*.

Zusatz. Dreyecke und Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich, in Ansehung ihrer Flächenräume, wie ihre Höhen. — Denn alle schiefwinkelige Dreyecke und Parallelogramme lassen sich sehr leicht in gleichgroße rechtwinkelige Dreyecke und Rechtecke verwandeln.

§. 194. *b*.

Zusatz. Die Flächenräume zweyer Dreyecke oder Parallelogramme von verschiedenen Grundlinien und Höhen stehen im zusammengesetzten Verhältnisse (§. 189.) ihrer Grundlinien und Höhen.

§. 194. *c*.

Zusatz. Wenn zwey Dreyecke oder Parallelogramme bey verschiedenen Höhen und Grundlinien gleiche Fläche haben, so verhält sich die Höhe des ersten zur Grundlinie des zweyten, wie die Höhe des zweyten zur Grundlinie des ersten; und umgekehrt.

§. 195.

Lehrsatz. Wenn man in der Seite eines Dreyecks einen willkührlichen Punct nimmt, und durch diesen mit irgend einer Dreyecksseite

eine Parallele zieht, so werden die beyden Seiten, wodurch die Parallele geht, in proportionirte Theile getheilt.

Es sey in der Seite AB (Fig. 103.) des Dreyecks ABC der Punct D genommen, und durch ihn DE mit BC gleichlaufend gezogen, so verhält sich AD : DB = AE : EC.

Beweis. Wenn man die Hülfslinien DC und CB zieht, so ergiebt sich der Satz aus (§. 193.)

§. 195. *a.*

Zusatz. Aus der Proportion AD : DB = AE : EC folgt auch noch

1) AD : AE = DB : EC (§. 187.)

2) AD + DB : AD = AE + EC : AE

3) AD : AE = AB : AC u. s. w.

Zusatz. Umgekehrt: wenn die Theile zweyer Dreyecksseiten proportionirt sind, so ist die durch die Theilungspuncte gehende gerade Linie mit der gegenüberliegenden Dreyecksseite gleichlaufend.

Es sey (Fig. 103.) AD : DB = AE : EC, so ist DE gleichlaufend mit BC.

Der Beweis kann sowohl direct als indirect geführt werden.

§. 197.

Lehrsatz. Wenn man den Winkel eines Dreyecks halbirt, und die Theilungslinie zur gegenüberliegenden Dreyecksseite verlängert, so

verhält sich der kleinere Schenkel dieses Winkels zum größern, wie der kleinere Abschnitt der getheilten Linie sich zum größern verhält.

Wenn in dem Dreyecke ABC (Fig. 104.) der Winkel B durch BD halbirt wird, so verhält sich AB : BC = AD : DC.

Der Beweis folgt leicht aus den Hülfslinien BE = BC, und EC.

§. 198.

Zusatz. Umgekehrt: Wenn sich die zwey Schenkel eines beliebigen Winkels im Dreyecke so zusammen verhalten, wie zwey Stücke in der dritten Seite, so wird eine gerade Linie, aus jenem Winkelpuncte nach dem Theilpuncte dieser Seite gezogen, jenen Winkel halbiren.

Es sey in dem Dreyecke ABC (Fig. 104.) AB : BC = AD : DC, so ist W. ABD = W. CBD.

Der Beweis ist der umgekehrte des vorigen.

§. 199.

Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken zwey Winkel des einen, einzeln genommen, so groß sind, als zwey Winkel des andern, (wodurch auch die dritten Winkel einander gleich sind), so sind die Seiten beyder Dreyecke, welche den gleichen Winkeln gegenüberstehen, proportionirt.

Es sey in den Dreyecken (Fig. 105.) ABC und

abc der W. B = W. b und W. C = W. c (folglich auch W. A = W. a) so ist AB : BC = ab : bc, AC : CB = ac : cb und AB : AC = ab : ac.

Beweis. Wenn man die beyden Dreyecke so aneinanderstellt, wie es (Fig. 106) zeigt, und die Linien BA, ca bis zum Durchschnittspuncte D verlängert, so ergiebt sich leicht die Wahrheit des Satzes aus dem Obigen (§. 195.)

§. 200.

Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken je zwey Seiten des einen den zwey Seiten des andern proportionirt sind, so sind die Winkel, welche in beyden Dreyecken den proportionirten Seiten gegenüberstehen, einander gleich.

Wenn in den Dreyecken (Fig. 107.) ABC und abc die Seite AB : BC = ab : bc, AC : CB = ac : cb und BA : AC = ba : ac, so ist W. C = W. c, W. A = W. a, und W. B = W. b.

Beweis. Wenn man Ab = ab macht und die bc mit BC gleichlaufend zieht, so sieht man leicht, daß Ac = ac, ferner bc (im Dr. 1.) = bc (im Dr. 2.) Daher sind die Dreyecke Abc und abc congruent.

§. 200. *a.*

Anmerkung. Man bemerke noch, daß aus der Proportionalität von zwey Paar Seiten in beyden Dreyecken die Proportionalität der dritten Seitenpaare schon von selbst folget. Es sey (Fig. 107.)

$$\begin{array}{l} AB : BC = ab : bc, \text{ und} \\ BC : AC = bc : ac, \text{ so ist (§. 189. u. 188.)} \\ \hline AB : AC = ab : ac. \end{array}$$

§. 201.

Erklärung. Wenn in zwey Dreyecken die drey Winkel des einen, einzeln genommen, den drey Winkeln des andern gleich, und die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten proportional sind, so nennt man die Dreyecke ähnlich. Die Aehnlichkeit derselben besteht also in der Gleichheit dieser einzelnen Winkel und der Proportionalität der den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten. Der in der Anschauungslehre gegebene Begriff: Aehnlichkeit ist Uebereinstimmung in der Gestalt, wird hierdurch schärfer bestimmt und geometrisch begründet.

§. 202.

Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist, und die Schenkel, welche ihn bilden, in beyden Dreyecken proportionirt sind, so sind diese Dreyecke ähnlich.

Es sey (Fig. 107.) W. A = W. a, und BA : AC = ba : ac, so sind die Dreyecke ABC und abc ähnlich, d. h., auch die übrigen Winkel sind gleich und die übrigen Seiten proportionirt.

Beweis. Wenn man das Dreyeck abc so in ABC legt, daß die gleichen Winkel a und A sich de-

cken, so sieht man leicht, daß (nach §. 196.) BC mit bc gleichlaufend ist, woraus das Uebrige folget.

§. 203.

Zusatz. I. Die Aehnlichkeit der Dreyecke geht daher aus drey Voraussetzungen hervor:

1) Aus der Gleichheit ihrer Winkel,

2) Aus Proportionalität ihrer Seiten,

3) Aus der Gleichheit eines von proportionalen Seiten eingeschlossenen Winkels.

II. Die Folgen, welche aus jeder dieser drey Voraussetzungen fließen, sind leicht zu erkennen. Ihre Entwickelung ist eine lehrreiche Uebung für die Schüler.

§. 204.

Lehrsatz. Wenn man von dem Scheitel des rechten Winkels im rechtwinkeligen Dreyecke ein Loth auf die Hypotenuse zieht, so entstehen zwey kleinere Dreyecke, welche unter sich und dem Ganzen ähnlich sind.

Die Erläuterung an einer Zeichnung und der Beweis ist sehr einfach.

Es ist lehrreich, die verschiedenen Proportionen zu entwickeln, welche aus diesem Satze folgen, da sie für vielfache Anwendungen richtig sind.

§. 205.

Erklärung. Wenn vier Größen a, b, c, d, eine Proportion bilden, so nennt man d die vierte

Proportionalgröße zu a, b und c. Desgleichen ist a die vierte Proportionalgröße zu d, c und b. Wenn sich a : b = b : c verhält, so heißt c die dritte Proportionalgröße zu a und b, und b wird die mittlere Proportionalgröße zwischen a und c genannt. Auch heißt die Proportion a : b = b : c eine stetige geometrische Proportion.

§. 206.

Aufgabe. Zu drey gegebenen Linien die vierte geometrische Proportionallinie zu finden.

Man soll (Fig. 108.) zu den Linien EF, CD und AB die vierte Proportionallinie finden, so daß sich EF zu CD, wie AB zu dieser vierten verhält.

Auflösung und Beweis ergeben sich leicht aus W. NGD (Fig. 109.), wo GH = EF, GH = CD, HL = AB gemacht, HK gezogen, und mit ihr die gleichlaufende LM construirt worden ist.

§. 207.

Zusatz. Auf ähnliche Weise findet man zu zwey gegebenen Linien eine dritte geometrische Proportionallinie.

§. 208.

Aufgabe. Zu zwey gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionallinie zu finden.

Die gegebenen Linien seyen (Fig. 110.) MN und GH. Man soll eine mittlere ED (Fig. 111.) finden, so daß MN : ED = ED : GH ist.

Auflösung und Beweis wird man daraus finden, daß AB (Fig. 111.) = MN + GH gemacht worden, aus der Mitte C ein Halbkreis beschrieben, und in der Entfernung AD = MN das Loth DE errichtet ist. AE und EB sind Hülfslinien zum Beweise.

§. 209.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in Theile zu theilen, welche den Theilen einer andern geometrisch proportional sind.

Es sey (Fig. 112.) die Linie AB nach dem Verhältnisse von AC : CD : DE : EB getheilt; man soll die gegebene Linie AG nach gleichem Verhältnisse theilen.

Auflösung und Beweis ergeben sich aus den Hülfslinien.

§. 210.

Zusatz. Wenn eine gegebene gerade Linie in eine beliebige Menge gleicher Theile getheilt werden soll, so hat eine ganz ähnliche Auflösung statt. Hierdurch ist die obige Aufgabe (§. 36.) ganz allgemein aufgelößt.

§. 210. *a.*

Zusatz. Jetzt ist man auch im Stande, irgend einen Theil eines gegebenen Quadrats

in ein ihm gleiches Quadrat umzuwandeln. Es sey dieser Theil z. B. $\frac{5}{7}$, so theile man jede der zwey Parallelseiten des gegebenen Quadrates in 7 gleiche Theile, nehme auf jeder (von einerley Endpuncte aus) $\frac{5}{7}$ und verbinde beyde Stücke durch eine gerade Linie, so entsteht ein Rechteck, welches $\frac{5}{7}$ des Quadrats ist und (nach §. 133. *a.*) leicht in ein gleichgroßes Quadrat verwandelt werden kann.

§. 211.

Anmerkung. Sollte die gerade Linie in viele gleiche Theile, z. B. in 21 getheilt werden, so theile man sie zuerst in 7 gleiche Theile, und dann den siebenten Theil wieder in 3 gleiche Theile, so muß der dritte Theil vom siebenten Theile der ein und zwanzigste Theil vom Ganzen seyn.

§. 212.

Lehrsatz. Rechtwinkelige ähnliche Dreyecke verhalten sich in Hinsicht ihrer Flächen, wie die Quadrate zweyer ähnlich liegenden Seiten in ihnen.

Es seyen (Fig. 113.) ABC und abc die zwey Dreyecke, so verhält sich Dr. ABC : Dr. abc wie das Quadrat von BC, d. h. BCGD zu dem Quadrate von bc, d. h. bcgd.

Beweis. Wird CD und cd gezogen, so verhält sich Dr. ABC : Dr. DBC = AB : BD; eben so Dr. abc : Dr. dbc = ab : bd. Da aber AB : BD = ab : bd ist, so ist Dr. ABC : Dr. DBC = Dr.

abc : Dr. dbc, oder Dr. ABC : Dr. abc = Dr. DBC : Dr. dbc. Da sich nun die Doppelten wie die Einfachen verhalten, so ist der Lehrsatz erwiesen.

§. 213.

Zusatz. Da sich irgend zwey gegebene ähnliche Dreyecke in zwey ähnliche rechtwinkelige von gleichem Inhalte mit jenen verwandeln lassen, so verhalten sich ähnliche Dreyecke überhaupt wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

§. 214.

Zusatz. Wenn sich zwey gerade Linien wie 1 : 2 : 3 verhalten, so ist es leicht durch geomotrische Construction zu zeigen, daß sich die Quadrate dieser Linie wie 1 : 4 : 9 verhalten. Daher verhalten sich die Flächenräume dreyer Dreyecke, deren homologe Seiten 1, 2, 3 sind, wie die Zahlen 1, 4, 9.

§. 215.

Anmerkung. Aus obigem Satze fließt folgender höchst einfache Beweis des pythagorischen Lehrsatzes (§. 115). Man denke sich ein rechtwinkeliges Dreyeck und von dem Scheitel des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse, so entstehen zwey kleinere rechtwinkelige Dreyecke, welche unter sich und dem ganzen Dreyecke ähnlich sind (§. 204). Diese drey Dreyecke verhalten sich daher auch wie die Quadrate ihrer drey Hypotenusen. Da aber die Summe der beyden kleinern Dreyecke dem größern Dreyecke gleich ist, so muß auch das Quadrat der größten Hypotenuse der Summe der Quadrate der

zwey andern Hypotenusen, d. h. der Quadratsumme der Catheten, gleich seyn. So viel wir wissen, ist dieser Beweis noch nirgends geführt worden.

§. 216.

Anmerkung. Auch verdient noch folgender Beweis dieses merkwürdigen Lehrsatzes hier eine Stelle. Wenn man das vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gezogene Loth durch das über diese Linie construirte Quadrat verlängert, so wird dieses dadurch in zwey Rechtecke getheilt. Da sich nun in jedem der kleinern rechtwinkeligen Dreyecke die kleinere (in der Hypotenuse des großen Dreyecks liegende) Cathete zur Hypotenuse verhält, wie eben diese Linie (als Cathete des großen Dreyecks) sich zur Hypotenuse des großen Dreyecks verhält, so ergiebt sich, wenn man in diesen beyden Proportionen die Produkte aus den äussern und den innern Gliedern bildet, die Wahrheit des pythagorischen Lehrsatzes nach Gründen der rechnenden Geometrie, welche unten weiter entwickelt werden. (Siehe §. 240).

XIII. Aehnlichkeit geradliniger Vielecke.

§. 217.

Lehrsatz. Wenn ähnliche Dreyecke auf ähnliche Weise verbunden werden, so entstehen ähnliche Vielecke daraus, d. h. solche, deren homologe Seiten proportional und deren homologe Winkel gleich sind.

Es sey (Fig. 114.) Dr. ABC dem Dr. abc, Dr. ADC dem Dr. adc ähnlich, so entstehen, wenn man beyde Dreyecke mit ihren gemeinsamen homologen Seiten AC und ac zusammensetzt, zwey ähnliche Vierecke ABCD und abcd.

Beweis. Folgt sehr leicht aus der angenommenen Aehnlichkeit der Dreyecke.

§. 218.

Zusatz. Hieraus folgt, daß durch Zusammensetzung von 3, 4, 5 ähnlichen Dreyecken u. s. w., ähnliche Fünf- Sechs- Siebenecke u. s. f. entstehen müssen.

§. 219.

Zusatz. Umgekehrt ist es leicht zu zeigen, daß ähnliche Vielecke durch ähnlich gezogene Querlinien in ähnliche Dreyecke getheilt werden können.

§. 220.

Zusatz. Desgleichen ist klar, daß sich die Umfänge ähnlicher Figuren wie irgend zwey ähnlich liegende Linien in ihnen verhalten.

§. 221.

Zusatz. Auch wird man leicht finden, daß sich die Flächen ähnlicher Figuren wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten in ihnen verhalten.

§. 221. *a*.

Anmerkung. Die strengen Beweise dieser vier wichtigen Sätze (§. 218, 219, 220 u. 221) sind nicht schwer zu führen. Sehr wichtig ist es aber auch, daß sich die Schüler in wirklichen Constructionen der dazu gehörigen Figuren üben.

§. 222.

Aufgabe. Ein Vieleck zu construiren, welches einem gegebenen ähnlich ist, ohne auf die Größe des zu construirenden zu sehen.

Man soll ein Sechseck bilden, welches dem gegebenen (Fig. 115.) ABCDEF ähnlich ist.

Auflösung. I. Durch einen in der Fläche des Vielecks angenommenen Punct G.

Construction und Beweis ergeben sich aus den Hülfslinien von selbst.

II. Durch einen in der Umfangslinie des Vielecks willkührlich genommenen Punct h (Fig. 116.) und den Querlinien FD, AD, BD.

Auch hier ist Construction und Beweis leicht zu finden.

III. Durch Annahme einer der Linie ED (Fig. 117.) homologen Linie ed, an deren Endpunct d der W. D und der ähnliche Schenkel dc gelegt wird, an dessen Endpunct c wieder der W. C nebst der ähnlichen Seite cb construirt wird u. s. w., bis das kleine Vieleck abgeschlossen ist.

IV. Nach jeder dieser drey Methoden kann auch das zu construirende Vieleck größer als das gegebene werden.

§. 223.

Aufgabe. Ueber eine gegebene gerade Linie ein Vieleck zu construiren, welches einem gegebenen Vielecke ähnlich ist.

Die gegebene Linie mag größer oder kleiner seyn, als ihre homologe Seite im gegebenen Vielecke, so kann die Auflösung sehr bequem nach der zweyten Methode des vorigen §. gefunden werden.

§. 224.

Zusatz. Wenn im rechtwinkeligen Dreyecke über jede Cathete und über die Hypotenuse eine ähnliche Figur beschrieben wird, so ist die über der Hypotenuse construirte so groß an Fläche, als die beyden andern zusammengenommen sind. Der einfachste Fall hievon ist, wenn über jede Cathete und über die Hypotenuse ein gleichseitiges Dreyeck beschrieben wird.

§. 225.

Zusatz. Hieraus ist es leicht:

I. Mehrere gegebene ähnliche Figuren in eine einzige zu verwandeln, die jeder von ihnen ähnlich und allen zusammengenommen gleich ist;

II. Eine Figur zu finden, welche dem Unterschiede zweyer ähnlichen Figuren gleich und jeder von ihnen ähnlich ist;

III. Eine gegebene Figur zu verdoppeln, zu verdreyfachen, zu halbiren; so, daß das Doppelte, Dreyfache, Halbe der gegebenen Figur ähnlich ist. (§. 119 u. 122. §. 221.)

IV. Von einer gegebenen Figur irgend einen bestimmten Theil in eine ihr ähnliche zu verwandeln; z. B. $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{4}{7}$ u. s. f. (§. 210. *a.*)

V. Eine Figur zu construiren, welche $2\frac{1}{2}$, $3\frac{5}{6}$, $4\frac{8}{9}$ mal u. s. w. größer als eine gegebene, und ihr ähnlich ist.

§. 225. *a.*

Anmerkung. Es ist eine sehr lehrreiche Uebung für die Schüler, sämmtliche fünf Fälle des vorigen §. an wirklichen Zeichnungen durchzuarbeiten. Dies befestigt die Theorie und giebt eine große Gewandtheit für's Practische.

Der
geometrischen Wissenschaftslehre
zweyter Cursus.

Rechnende Elementargeometrie.

Rechnende Elementargeometrie.

I. Allgemeine Vorbegriffe.

§. 226.

Erklärung. Messen heißt bestimmen, wie oft eine zur Einheit angenommene Größe in einer andern ihr gleichartigen enthalten ist. Die Größe, womit man ausmißt, wird das Maaß genennt. (man vergl. oben §. 177.)

§. 227.

Grundsatz. Das Maaß und die zu messende Größe müssen gleichartig seyn.

§. 228.

Zusatz. Daher können Linien nur durch Linien, Flächen nur durch Flächen gemessen werden.

§. 229.

Zusatz. Das Maaß für gerade Linien ist selbst eine gerade Linie. Ihre Größe ist willkührlich. Doch muß sie für einerley Messung unveränderlich seyn.

§. 230.

Anmerkung. Das Maaß, womit im gemeinen Leben die geraden Linien gemessen werden, ist der bekannte Fuß oder Schuh. Seine Größe findet man an verschiedenen Orten sehr verschieden. Der Fuß ist ein natürliches Maaß, weil es sehr natürlich ist, die Größe einer geraden Linie, z. B. auf dem Felde, mit dem Fuße des Körpers zu bestimmen. Wir werden uns bey den folgenden Messungen eine kleine gerade Linie als Fußmaaß vorstellen, und dieselbe als Einheit unserer Messungen betrachten.

§. 231.

Erklärung. Die Länge des Fußes denkt man sich in zehn gleiche Theile eingetheilt, und nennt einen dieser Theile einen Zoll. Des Zolls zehnter Theil heißt Linie, der Linie zehnter Theil, Punct. Fuße, Zolle, Linien und Puncte werden durch kleine Strichchen bezeichnet. So heißt 8′ 6″ 5‴ 4⁗ acht Fuß, sechs Zoll, fünf Linien, vier Puncte. Eine Länge von zehn Fuß wird eine Ruthe genannt. Ihr Zeichen ist eine kleine Nulle, und 36° heißt 36 Ruthen.

§. 232.

Anmerkung. I. Diese Eintheilung des Maaßes heißt die zehntheilige oder Decimal-Eintheilung. Im bürgerlichen Leben wird die Ruthe in zwölf Fuß, der Fuß in 12 Zolle, der Zoll in 12 Linien abgetheilt, welches man die zwölftheilige oder Duodecimal-Eintheilung nennt.

II. Da die Decimaleintheilung der Maaße mit unserm zehntheiligen Zahlensysteme vollkommen

einerley ist, so gewährt sie bey der Reduction dieser Maaße große Bequemlichkeit. So ist z. B. 18° 4′ 6″ 3‴ = 184′ 6″ 3‴ = 1846″ 3‴ = 18463‴. Umgekehrt ist 8742‴ = 874″ 2‴ = 87′ 4″ 2‴ = 8° 7′ 4″ 2‴ u. s. f.

III. Weit beschwerlicher ist diese Verwandlung bey der Duodecimal-Eintheilung. Hier sind z. B. 8° = 8 + 12 = 96′; ferner 6′ = 6 + 12 = 72″; endlich 5° 3′ 4″ 6‴ = (5 + 12 + 3)′ 4″ 6‴ = 63′ 4″ 6‴ = (63 + 12 + 4)″ 6‴ = 760″ 6‴ = (760 + 12 + 6)‴ = 9126‴. (Das Zeichen + bedeutet die Multiplication)

§. 233.

Erklärung. Ein Quadrat, welches einen Fuß lang und einen Fuß breit ist, wird Quadratfuß genannt. Gleichwie der Längenfuß das bequemste Maaß für die Linien ist, so ist dieser Quadratfuß das einfachste Maaß für die Flächen. Aus dieser Erklärung ergiebt es sich auch, was man eine Quadratruthe, einen Quadratzoll, eine Quadratlinie heißt.

§. 234.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie mit dem gegebenen Maaße zu messen.

Es sey (Fig. 118.) AB die zu messende Linie, m der Maaßstaab.

Auflösung. Man lege das Maaß mit seinem Endpuncte in A, und mit seiner ganzen Länge in AB, so trifft der andere Endpunct in 1 ein. Eben

so lege man das Maaß von 1 nach 2, von 2 nach 3 u. s. w., so wird man finden, daß es gerade achtmal in die Linie AB gelegt werden kann. Daher ist die Linie AB achtmal so groß als m, und, wenn m den Fuß bedeutet, so ist AB acht Fuß lang.

§. 235.

Zusatz. Wenn bey dem letzten Anlegen des Maaßes dasselbe über den Endpunct der zu messenden Linie hinausreicht, so bestimme man noch die Theile des Maaßstaabes, welche bis zu diesem Endpuncte reichen, d. h. man zähle die Zolle und Linien.

§. 236.

Anmerkung. I. Wie krumme Linien gemessen werden können, soll weiter unten gezeigt werden.

II. Auch bemerke man, daß hier immer nur von einem reinen oder theoretischen, nicht aber von einem angewandten oder practischen Messen gerader Linien, wie z. B. auf dem Felde bey Bestimmung der Entfernung zweyer Gegenstände, die Rede ist. Dieses letztere gehört in die practische Elementargeometrie.

II. Ausmessung geradliniger Figuren.

§. 237.

Aufgabe. Ein gegebenes Quadrat auszumessen.

Es sey (Fig. 119.) ABCD das gegebene Quadrat, m der Fuß. Man soll finden, wie viele Quadratfuße das gegebene Quadrat enthält.

Auflösung. I. Wenn DC durch m genau gemessen werden kann, so multiplicire man die Zahl dieser gefundenen Maaßtheite mit sich selbst. Das Product bestimmt die Menge der Quadratfuße, welche das gegebene Quadrat enthält.

II. Wenn DC nicht genau mit m gemessen werden kann, so bestimme man, wie viele Theile von m, d. h. wie viele Zolle in DC enthalten sind. Diese Zahl von Zollen mit sich selbst multiplicirt, giebt die Menge der Quadratzolle in dem gegebenen Quadrate.

Erläuterung. Wenn m in DC viermal genau enthalten ist, so enthält ABCD viermal vier, d. h. 16 Quadratfuße.

Enthielte aber das Quadrat FGHL (Fig. 120.) nach seiner Seite HL, z. B. 4′ 5″, so wird sein Flächeninhalt gefunden, wenn man 4′ 5″ mit sich selbst multiplicirt. Da nun 4′ = 40″, so ist 4′ 5″ = 45″ und das Quadrat FGLH enthält 45 mal 45, d. h. 2025 Quadratzolle.

Der Beweis ergiebt sich auf anschauliche Art aus der Figur.

§. 238.

Zusatz. Da nach der Decimaleintheilung der Fuß aus zehn Zollen besteht, so muß der Quadratfuß zehnmal zehn, d. h. 100 Quadratzolle enthalten. Man verwandelt daher Quadratzolle in Quadrat-

fuße, wenn man jene mit 100 dividirt; Quadratfuße aber in Quadratzolle, wenn man jene durch 100 multiplicirt. Daher betragen die im vorigen §. gefundenen 2025 Quadratzolle so viel, als 20 Quadratfuße und 25 Quadratzolle.

§. 238. *a.*

Anmerkung. I. Zur Bezeichnung des Quadratmaaßes schreibt man den Buchstaben q zur Rechten oberhalb der Ziffer. So heißt $8^{q\circ}$ $23^{q\prime}$ $46^{q\prime\prime}$ soviel, als 8 Quadratruthen, 23 Quadratfuß, 46 Quadratzolle.

II. Die Decimaleintheilung erleichtert auch hier die Reductionen. So sind $7^{q\circ}$ $23^{q\prime}$ $46^{q\prime\prime} = 823^{q\prime}$ $46^{q\prime\prime} = 82346^{\prime\prime}$; ferner $12^{q\circ}$ $8^{q\prime}$ $4^{q\prime\prime} = 1208^{q\prime}$ $4^{q\prime\prime} = 120804^{q\prime\prime}$. Desgleichen sind $64834^{q\prime\prime} = 6^{q\circ}$ $48^{q\prime}$ $34^{q\prime\prime}$ u. s. w.

III. Nach der Duodecimalabtheilung ist $1^{q\circ} = 12 + 12 = 144^{q\prime}$, $1^{q\prime} = 144^{q\prime\prime}$ u. s. f. Wieviel beschwerlicher hier die Reduction sey, wird der Lehrer in Berechnung mehrerer Beyspiele zeigen.

§. 239.

Zusatz. Gewöhnlich sagt man, der Inhalt eines Quadrats werde gefunden, wenn man seine Seite mit sich selbst multiplicirt. Dieser Ausdruck ist nicht ganz richtig, weil man eine Linie nicht mit einer Linie multipliciren kann. Besser sagt man daher, diese Fläche werde gefunden, wenn man die Zahl, welche das Maaß der Seite des Quadrats ist, mit sich selbst multiplicirt.

§. 240.

Aufgabe. Den Inhalt eines gegebenen Rechtecks zu finden.

Es sey (Fig. 121.) ABCD das gegebene Rechteck.

Auflösung. Man messe Höhe und Grundlinie mit einerley Maaße = m, und multiplicire die hierdurch gefundenen zwey Zahlen miteinander, so giebt das Product die Menge der Quadratmaaße, welche das Rechteck enthält.

Erläuterung. Es sey AC = 3 m, CD = 6 m, so ist ABDC = 3mal 6 = 18 Quadratfuße.

Wäre AC = 3′ 4″ und CD 6′ 8″, so enthielte das Rechteck ABDC 34mal 68, d. h. 2312 Quadratzolle, oder 23 Quadratfuße 12 Quadratzolle.

Der Beweis leuchtet von selbst ein. Practische Uebungen sind dem Schüler sehr zu empfehlen.

§. 241.

Aufgabe. Die Fläche eines schiefen Parallelogramms zu finden.

DEGF (Fig. 122.) sey das zu berechnende Parallelogramm.

Auflösung. Das Maaß von FG wird mit dem Maaße des Lothes DH multiplicirt.

Der Beweis ergiebt sich leicht aus §. 103.

§. 242.

Aufgabe. Den Inhalt eines rechtwinkeligen Dreyecks zu finden.

Es sey DEF (Fig. 123.) das gegebene Dreyeck.

Auflösung. Das halbe Maaß der einen Cathete mit dem ganzen Maaße der andern, oder das halbe Maaß der andern Cathete mit dem ganzen Maaße der ersten multiplicirt, oder das halbe Product aus den Zahlen der gemessenen beyden Catheten, giebt den Flächeninhalt des Dreyecks.

Der Beweis und Erläuterung darüber finden sich leicht (§. 108.)

§. 243.

Aufgabe. Die Fläche des schiefwinkeligen Dreyecks zu finden.

Es sey (Fig. 124.) BAC dieses Dreyeck.

Auflösung. Wenn man das Maaß der Grundlinie des gegebenen Dreyecks g, seiner senkrechten Höhe h nennt, so ist dessen Inhalt = $\frac{1}{2}$ g mal h, oder $\frac{1}{2}$ h mal g, oder $\frac{1}{2}$ (g mal h).

Der Beweis folgt aus dem vorigen §.

§. 244.

Anmerkung. Welche von diesen drey Auflösungen die bequemste sey, ergiebt sich leicht aus den Zahlen, wodurch das Maaß der Grundlinie und Höhe bestimmt ist.

§. 245.

Aufgabe. Die Fläche eines Paralleltrapez zu bestimmen.

Es sey (Fig. 125.) ABCD das gegebene Paralleltrapez, dessen Inhalt gefunden werden soll.

Auflösung. Die Summe des Maaßes der Parallelseiten wird mit dem Maaße ihres halben Abstandes multiplicirt.

Beweis und Erläuterung ergeben sich leicht aus Betrachtung der Hülfslinien in der Figur, und aus wirklichen Zahlenbeyspielen.

§. 246.

Aufgabe. Den Inhalt eines jeden Trapez zu berechnen.

DEFG (Fig. 126.) sey das gegebene Trapez.

Auflösung und Beweis ergeben sich aus den Hülfslinien der Figur.

§. 247.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines jeden geradlinigen Vielecks zu finden.

ABCDEF (Fig. 127.) sey das gegebene Vieleck.

Auflösung und Beweis folgen sogleich aus Betrachtung der Hülfslinien.

§. 248.

Aufgabe. Den Flächeninhalt einer Figur zu finden, welche theils durch gerade, theils durch krumme Linien eingeschlossen ist.

Es sey (Fig. 128.) ABCDEFGA die zu berechnende Fläche.

Auflösung. Da krumme Linien, welche nur unbedeutende Krümmungen haben, ohne großen Fehler wie gerade Linien zu betrachten sind, so läßt sich die gegebene Figur theils in Paralleltrapeze, theils in Dreyecke theilen, welche, einzeln berechnet und addirt, den Inhalt der ganzen Fläche bestimmen. Die gezogenen Hülfslinien in der Figur erläutern dieses. Wirkliche Beyspiele in Zahlen sind sehr nützliche Uebungen für die Schüler.

§. 249.

Aufgabe. Den Inhalt eines regulären Vielecks zu finden.

Auflösung. Da jedes reguläre Vieleck in so viele congruente Dreyecke getheilt werden kann, als es Seiten hat, so berechne man den Inhalt eines dieser Dreyecke und multiplicire ihn mit der Seitenzahl des Vielecks.

III. Kreisrechnungen.

§. 250.

Lehrsatz. Die Kreislinie ist dem Umfange eines regulären Vielecks von sehr vielen Seiten gleich, welches in die Fläche des Kreises beschrieben wird.

Beweis. Wenn man die Seiten eines regulären Vielecks im Kreise verdoppelt, so fallen sie immer näher an die Kreislinie, und da man diese Ver-

doppelung stets weiter fortsetzen kann, so wird jede Vielecksseite dem ihr zugehörigen Bogen immer mehr an Größe gleich werden, so daß man einmal jene Vielecksseiten von diesen Bogen, d. h. den ganzen Umfang des Vielecks von der Kreislinie nicht mehr unterscheiden kann.

§. 251.

Zusatz. Hieraus ergiebt sich die Möglichkeit, die Größe der Kreislinie zu bestimmen, wenn man im Stande ist, den Umfang eines in den Kreis beschriebenen Vielecks von sehr vielen Seiten zu messen. Eine nähere Erörterung dieser wichtigen Aufgabe wird unten (Vierter Cursus) vorkommen.

§. 252.

Anmerkung. Die streng wissenschaftliche Darstellung dieser Berechnung gehört noch nicht hieher. Darum begnügen wir uns, folgende historische Notizen und deren Resultate für die Auflösungen der nachfolgenden Aufgaben beyzubringen.

§. 253.

Erklärung. I. Der Erste, welcher sich bemühte, das Verhältniß des Durchmessers zu dem Umfange eines Kreises in Zahlen zu bestimmen, war der vortreffliche griechische Mathematiker Archimedes. Er wurde zu Samos i. J. 287 (vor Christi Geburt) geboren, und im 79ten Jahre seines Alters, bey der Eroberung von Syracus durch die Römer, von einem römischen Soldaten ermor-

det, als er eben mit seinen Studien beschäftigt war. Er fand durch geometrische Construction eines regelmäßigen 96 Ecks in und eines ähnlichen 96 Ecks um den Kreis, daß das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange kleiner sey als 7 : 22, aber größer als 71 : 223. Da nun diese Verhältnisse von dem Verhältnisse 100 : 314 nicht sehr verschieden sind, so sagt man meist, der Durchmesser eines Kreises verhalte sich zu seiner Peripherie wie 100 : 314, d. h. wenn der Durchmesser z. B. 100 Fuß wäre, so betrüge der Umfang etwa 314 Fuße. Nennt man den Durchmesser D, den Umfang P, so ist D : P = 100 : 314.

II. In neuern Zeiten wurde das Verhältniß von D : P noch weit schärfer berechnet. Ein sehr genaues, leicht zu behaltendes Verhältniß ist dieses: D : P = 113 : 355. Denn wenn man die drey ersten ungeraden Zahlen (1, 3 u. 5) paarweise nebeneinandersetzt, nämlich 113355 und die drey ersten von den drey letzten durch das Verhältnißzeichen (:) trennt, so ist 113 : 355 das Verhältniß von D : P.

III. Für gewöhnliche Fälle ist das Verhältniß D : P = 100 : 314 scharf genug; will man genauer rechnen, so nehme man das andere D : P = 113 : 355. Noch schärfere Verhältnißzahlen kommen unten (im vierten Cursus) vor.

§. 254.

Zusatz. Da alle Kreislinien als Umfänge re-

gulärer Vielecke von unzählig vielen Seiten zu betrachten sind, diese Umfänge sich aber wie ähnlich-liegende Linien in solchen Vielecken verhalten, so ist das Verhältniß vom Durchmesser zum Umfang eines Kreises ein beständiges, welches bey allen denkbaren Kreisen Statt finden muß.

§. 255.

Aufgabe. Der Durchmesser eines Kreises ist in bekannten Maaßtheilen gegeben; man soll die Größe seines Umfanges in eben diesen Maaßtheilen finden.

Auflösung. Ergiebt sich nun aus dem Vorhergehenden von selbst.

Beyspiele. Es sey D = 48′, oder D = 216′, oder D = 6′ 8″, oder D = 38′ 7″, oder D = 18′ 6″ 8‴; wie groß ist in allen diesen Fällen P?

Man rechne nach beyden Verhältnissen (in §. 253.), um die Unterschiede der Resultate zu finden.

§. 256.

Aufgabe. Aus dem Durchmesser des Kreises und dem Winkel eines Ausschnitts in ihm, die Größe des dem Ausschnitte zugehörigen Bogens zu finden.

Auflösung. Sie folgt aus dem Satze, daß sich 360° zu dem Winkel des Ausschnittes verhalten, wie sich der ganze Umfang des Kreises zu dem zu findenden Bogen verhält.

Beyspiele sind leicht zu geben, und müssen dem Anfänger diese Aufgaben erläutern.

§. 257.

Aufgabe. Die Größe der Peripherie eines Kreises ist in bekanntem Maaße gegeben. Man soll den dazu gehörigen Durchmesser finden.

Auflösung. Hier braucht man die Verhältnisse $P:D = 314:100$, oder $P:D = 355:113$.

Beyspiele zur Erläuterung.

§. 258.

Aufgabe. Aus der Größe eines Kreisbogens und dem dazu gehörigen Winkel des Ausschnittes den Durchmesser des dem Ausschnitte zugehörigen Kreises zu finden.

Auflösung. Der Schüler wird leicht darauf geleitet werden.

Beyspiele.

§. 259.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises und einem Bogen desselben, die Größe des Winkels zu finden, der durch diesen Bogen bestimmt wird.

Auflösung und Beyspiele muß der Schüler selbst finden.

§. 260.

Anmerkung. In allen diesen Aufgaben könnte auch statt des Durchmessers der Halbmesser gegeben oder gefunden werden, wodurch mehrere Rechnungsübungen veranlaßt werden.

§. 261.

Aufgabe. Der Durchmesser eines Kreises ist gegeben. Man soll finden, wie viele Minuten ein Bogen desselben enthält, der diesem Durchmesser gleich ist.

Auflösung. Folgt aus dem Vorhergehenden.

§. 262.

Lehrsatz. Die Fläche des Kreises ist der Fläche eines in denselben beschriebenen regulären Vielecks von sehr vielen Seiten gleich.

Beweis. Da man die Vielecksseiten ohne Ende verdoppeln kann, und die Fläche des Vielecks hierdurch der Fläche des Kreises immer näher und näher kommt, (man vergleiche vorzüglich oben §. 168.) so verschwindet die Ebene des Vielecks endlich in der Kreisebene, und beyde sind einerley.

§. 263.

Zusatz. Alle Kreisflächen sind daher ähnliche Figuren. Daher verhalten sich ihre Umfänge wie ihre Durchmesser oder Halbmesser, und ihre Flächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder Halbmesser.

§. 264.

Zusatz. Hieraus fließet die Auflösung der Aufgaben: Zwey, oder mehrere Kreise in einen Kreis zu verwandeln; so, daß seine Fläche den Flächen der gegebenen Kreise gleich ist; einen Kreis zu finden, welcher der Differenz zweyer gegebenen Kreise gleich ist; einen Kreis zu construiren, der 3, 4, 5mal, oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{7}$mal so groß, als ein gegebener ist; u.s.w. (§. 210, *a*.); oder einen Kreis zu construiren, welcher $3\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{7}$, $7\frac{3}{8}$mal so groß als der angegebene ist; u.s.w. (§. 225, V.)

§. 265.

Zusatz. Auch muß jede Kreisfläche einem Dreyecke gleich seyn, dessen Grundlinie ihre Peripherie, und dessen Höhe ihr Halbmesser ist.

§. 265. *a*.

Anmerkung. Da jedes Dreyeck in ein ihm gleiches Quadrat verwandelt werden kann (§. 133, *b*.) so siehet man hieraus die Möglichkeit, ein der Kreisfläche gleiches Quadrat zu finden, wenn seine Peripherie in einer geraden Linie gegeben wäre. Auch sehe man unten (§. 376.)

§. 266.

Aufgabe. Der Durchmesser eines Kreises ist gegeben. Man soll seinen Flächeninhalt berechnen.

Auflösung. Wenn der Radius r, die Peripherie p, die Kreisfläche F heißt, so ist $F = \frac{1}{2} r \times p$, oder $F = r \times \frac{1}{2} p$, oder $F = \frac{1}{2} (r \times p.)$

Beweis. Ergiebt sich aus dem vorhergehenden §.

Beyspiele. Es sey r = 8′ oder r = 12′ 8″, oder r = 126′ 5″ u. s. f., wie groß ist die dazu gehörige Fläche?

§. 266. *a.*

Zusatz. Da $F = \frac{1}{2} r \times p$ (vor. §.), aber $p = 2r \times \frac{314}{100} = 2r \times 3,14$, so wird $F = \frac{1}{2} r \times 2r \times 3,14 = r \times r \times 3,14$, d. h. Wenn man des Halbmessers Maaß mit sich selbst und sodann noch mit 3, 14 multiplizirt, so giebt das Produkt den Flächeninhalt des Kreises. Beyspiele erläutern dieses.

§. 267.

Aufgabe. Aus der gegebenen Peripherie eines Kreises seinen Flächeninhalt zu finden.

Auflösung. Man suche zuerst den Durchmesser, sodann die Fläche.

§. 267. *a.*

Zusatz. Da $2r = \frac{100}{314} \times p$, so ist $r = \frac{50}{314} \times p$, und $\frac{1}{2} r = \frac{25}{314} \times p$; folglich $F = \frac{25}{314} \times p \times p$, oder $F = p \times p \times 0,079$, d. h. das Product der Peripherie in sich selbst und in den Bruch 0,079 giebt den Flächeninhalt des Kreises. Beyspiele dienen zur Erläuterung.

§. 268.

Aufgabe. Das Verhältniß vom Quadrate des Durchmessers eines Kreises zu seiner Fläche zu bestimmen.

Auflösung. Wenn man D = 100 sezt, so ist P = 314 und die Größe der Kreisfläche = 25 × 314 = 7850. Daher verhält sich der Inhalt vom Quadrate des Durchmessers zum Inhalte der Kreisfläche wie 10000 : 7850, d. h. wie 1000 : 785.

§. 269.

Aufgabe. Durch Hülfe des Verhältnisses $D^q : F = 1000 : 785$ aus dem gegebenen Durchmesser des Kreises seine Ebene zu berechnen.

Auflösung und Beyspiele sind leicht.

§. 270.

Aufgabe. Der Winkel des Ausschnittes ist gegeben, nebst dem Halbmesser. Die Größe des Ausschnittes soll berechnet werden.

Auflösung. I. Durch Berechnung des zum Ausschnitte gehörigen Bogens.

II. Durch Berechnung der Fläche des ganzen Kreises.

Beyspiele zur Erläuterung.

§. 271.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Inhalte des Ausschnittes und dem Halbmesser, den Winkel des Ausschnittes zu berechnen.

Auflösung. Des Ausschnitts Inhalt durch den halben Radius dividirt, giebt die Größe seines Bogens u. s. f.

Beyspiele.

§. 272.

Aufgabe. Wenn der Halbmesser eines Kreises, eine Sehne nebst dem ihr zugehörigen Bogen und der Abstand der Sehne vom Mittelpuncte gegeben ist, die Größe der durch die Sehne bestimmten beyden Abschnitte zu berechnen.

Auflösung. Der kleinere Abschnitt ist dem Unterschiede des Ausschnitts und des darin entstehenden Dreyecks; der größere aber dem Unterschiede des ganzen Kreises und dem kleinern Abschnitte gleich.

§. 273.

Aufgabe. Wenn zwey concentrische Kreise gegeben sind, die Fläche des Ringes zu berechnen.

Auflösung. Er ist dem Unterschiede der beyden Kreisflächen gleich. Nennt man den größern Halbmesser R, den kleinern r, so ist der Flächeninhalt des Ringes $= R \times R \times 3,14 - r \times r \times 3,14 = (R \times R - r \times r) \times 3,14$. Da nun $R \times R$ den Inhalt des mit dem größern Halbmesser beschriebenen, $r \times r$ aber die Fläche des mit dem kleinern Radius construirten Quadrates vorstellt, so findet man des Ringes Fläche, wenn man den Unterschied der Quadrate der Halbmesser mit 3,14 multiplicirt.

§. 274.

Zusatz. Auch kann man den Inhalt eines Aus-

schnitts vom Ringe finden, wenn die zwey Halbmesser und der Ausschnittswinkel gegeben sind.

§. 275.

Anmerkung. Da dieser Cursus gelehrt hat, gerade Linien zu messen und hierdurch die Linienverhältnisse in Zahlen darzustellen, so sollen hier noch einige lehrreiche Anwendungen davon folgen, welche in dem vorhergehenden Cursus nicht so leicht verständlich gewesen seyn würden.

IV. Linienverhältnisse vermittelst des Kreises.

§. 276.

Lehrsatz. Wenn sich zwey Sehnen im Kreise durchschneiden, so ist das Rechteck aus den Segmenten der einen, dem Rechtecke aus den Segmenten der andern gleich.

Es seyen (Fig. 129.) AB und CD die sich in E schneidenden Sehnen, so ist das Rechteck aus den Stücken AE und BE dem Rechtecke aus den Stücken CE und DE gleich.

Beweis. Wenn man die Hülfslinien AC und BD zieht, so sind die Dreyecke AEC und DEB ähnlich, woraus der Lehrsatz folget.

§. 277.

Zusatz. I. Wenn eine Sehne im Kreise auf der Mitte der andern lothrecht steht, so ist das Rechteck aus den Segmenten der größern dem Quadrate der halben kleinen Sehne gleich.

Wenn AB (Fig. 130.) auf MN in deren Mitte D lothrecht steht, so ist das Rechteck aus AD und DB dem Quadrate von MD = DN gleich.

II. Auch sieht man leicht, daß die größere Sehne hier immer ein Durchmesser des Kreises ist.

§. 278.

Zusatz. Hieraus fließet abermal die Aufgabe: Jedes Rechteck in ein ihm gleiches Quadrat zu verwandeln. (§. 133. *a.*)

§. 279.

Zusatz. Auch kann hierdurch jede geradlinige Figur in ein Quadrat von gleicher Größe verwandelt werden. (§. 133. *b.*) Eben dies gilt von gemischt- und krummlinigen Figuren, und somit auch von der Kreisfläche.

Beyspiele zur Erläuterung sind sehr lehrreich.

§. 280.

Lehrsatz. Wenn in einem Kreise irgend ein Viereck beschrieben ist, so sind die zwei Rechtecke aus dessen beyden gegenüberliegenden Seiten dem Rechtecke aus den beyden Diagonalen gleich.

Es sey (Fig. 131) ABCD das gegebene Viereck, AC und BD seine Diagonalen, so ist $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$.

Beweis. Man ziehe BE so, daß CBE = W. ABD wird, so ist auch W. CBD = W. ABE; folg-

lich, wegen W. CDB = W. BAE, das Dr. CDB dem Dr. BAE ähnlich. Daher ist AB × DC = AE × DB. Allein Dr. EBC ist auch ähnlich dem Dr. ABD, folglich CB × DA = CE × DB. Aus Beydem wird CB × DA + AB × DC = CE × DB + AE × DB = (CE + AE) × DB = AC × DB.

§. 280. *a.*

Zusatz. I. Wenn das in dem Kreise beschriebene Viereck ein Rechteck oder ein Quadrat ist, so ist dieses ein besonderer Fall, der unter dem allgemeinen in §. 280 steht, und seine Wahrheit ergiebt sich schon aus §. 115.

II. Um ein gegebenes Rechteck in zwey andere Rechtecke zu verwandeln, construire man einen Kreis, worin des gegebenen Rechtecks Seiten zwey sich schneidende Sehnen sind u. s. w.

III. Auch kann man vermittelst dieses Satzes ein gegebenes Quadrat in ein Quadrat und in ein Rechteck verwandeln, welche zusammen der Fläche jenes Quadrates gleich sind; so daß das zu findende Quadrat eine gegebene Seite hat.

IV. Auflösungen und Beweise dieser Aufgaben werden die Schüler unter Anleitung des Lehrers selbst finden.

§. 281.

Lehrsatz. Wenn von einem willkührlichen Puncte ausserhalb des Kreises zwey gerade Linien dergestalt nach demselben gezogen sind, daß

jede dessen Umfang in zwey Puncten durchschneidet, so ist das Rechteck aus dem äussern Segmente der einen dieser Linien in diese ganze Linie dem Rechtecke aus eben diesen Stücken der andern gleich.

Es sey (Fig. 132.) A der gegebene Punct, AB und AC die gezogenen Linien, welche den Kreis in D und B, und dann auch in E und C schneiden, so ist das Rechteck aus AD und AB dem Rechtecke aus AE und AC gleich.

Beweis. Ergiebt sich, nach gezogenen Hülfslinien DC und BE, aus der Aehnlichkeit der beyden Dreyecke ABE und ACD.

§. 282.

Zusatz. Wenn die schneidende Linie ADB so lange gegen F rückt, bis sie in diesem Puncte zur Tangente AF wird, so ist das Quadrat von AF dem Rechtecke von AE und AC gleich. Oder allgemein: Wenn von einem Puncte ausserhalb des Kreises eine Tangente an den Kreis, und eine schneidende Linie durch den Kreis gezogen wird, so ist das Quadrat jener Tangente dem Rechtecke aus dieser schneidenden Linie und ihrem äussern Segmente gleich.

§. 283.

Anmerkung. Die Wahrheit dieses Satzes (vor. §.) ergiebt sich auch aus Folgendem: Wenn man (Fig. 133.) CF und FE, auch DF und DE nebst dem Lothe DG zieht, so ist W. DFG + W. GFA = R; auch W. DFG + W.

GDF = R, folglich GFA = W. GDF; allein es ist auch W. GDF = W. C. Daher ist das Dr. AFC dem Dr. AEF ähnlich u. s. w.

§. 284.

Erklärung. Wenn über der einen Seite einer gegebenen geraden Linie ein Halbkreis, und nach der andern ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreyeck beschrieben, und aus dessen Spitze mit seinem Schenkel ein Quadrant durch den Halbkreis construirt wird, so heißt die von den beyden krummen Linien (einer halben und einer viertels Kreislinie) eingeschlossene Ebene das Mondchen des Hypocrates, eines berühmten Geometers, der 450 Jahre vor Christus gelebt, und diese Fläche zuerst genau zu berechnen gelehrt hat.

Es sey über DB (Fig. 134.) der Halbkreis DAB und das gleichschenkelige rechtwinkelige Dreyeck DFB construirt, auch aus F mit FD der Viertelkreis DEB beschrieben, so ist DABED das Mondchen, Lunula Hypocratis.

§. 285.

Lehrsatz. Der Flächeninhalt des Mondchens ist dem Quadrate des kleinern Halbmessers gleich.

Oder: DABED = DCFG.

Beweis. Da der Kreis mit DF noch einmal so groß ist, als der Kreis mit DC, so muß der Quadrant DFBED dem Halbkreise DBAD gleich seyn.

Da aber beyde den Abschnitt DBED gemein haben, so ist Dr. DFB = DEBAD. Aber Dr. DFB = DCFG; folglich u. s. w.

§. 286.

Anmerkung. Dieser Satz ist deshalb lehrreich, weil eine von krummen Linien eingeschlossene Figur ganz genau in ein ihr gleiches Quadrat verwandelt werden kann.

V. Geometrische Theilungen der Figuren.

§. 287.

Anmerkung. Nachstehende Aufgaben sind absichtlich ohne Zeichnungen aufgelößt worden, weil es eine sehr lehrreiche Uebung für Anfänger ist, sich diese Zeichnungen selbst zu entwerfen und den Beweis sodann aufzufinden. Uebrigens enthalten sie nur die ersten Gründe vom Theilen der Figuren durch geometrische Constructionen.

§. 288.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreyeck aus einem seiner Winkelpunkte durch eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man ziehe aus diesem Winkelpuncte nach der Mitte der ihm gegenüberstehenden Seite eine gerade Linie, so halbirt diese das Dreyeck.

Erläuterung und Beweis ergeben sich von selbst.

§. 289.

Zusatz. Eben so leicht ist es: jedes Dreyeck aus

einem Winkelpunkte in mehrere gleiche oder verhältnißmäßige Theile zu theilen.

§. 290.

Aufgabe. Aus einem in einer Dreyecksseite gegebenen Puncte das Dreyeck zu halbiren.

Auflösung. I. Läge der gegebene Punct in der Mitte einer Seite, so folgte die Auflösung aus dem vorigen §.

II. Wenn nicht, so ziehe man aus der Mitte jener Seite, worin der gegebene Punct liegt, und aus diesem Puncte selbst nach der gegenüberstehenden Spitze zwey gerade Linien, mit der zweyten aus der Mitte eine Parallele, und verbinde den Punct, wo sie in der andern Seite eintrifft, mit dem zuerst gegebenen Puncte durch eine gerade Linie, so halbirt letztere das Dreyeck.

Beweis. Folgt aus dem Satze, daß Dreyecke von gleicher Grundlinie und Höhe gleich sind.

§. 291.

Zusatz. Aehnlich ist die Auflösung der Aufgabe: Aus einem in der Seite des Dreyecks gegebenen Punkte dasselbe in mehrere gleiche oder in verhältnißmäßige Theile zu theilen.

§. 292.

Aufgabe. Aus einem in der Fläche eines Dreyecks gegebenen Puncte dasselbe in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. I. Wenn der gegebene Punct in einer geraden Linie liegt, welche von einem Scheitel nach der Mitte der ihm gegenüberstehenden Seite gezogen wird, so ist die Aufgabe von selbst aufgelößt.

II. Fällt der gegebene Punct aber zur Seite dieser gezogenen Linie, so verbinde man ihn mit dem Scheitel jenes Winkels, woraus sie gezogen worden, durch eine gerade Linie, ziehe aus der Mitte der getheilten Seite eine Parallele mit ihr, welche die gegenüberstehende Dreyecksseite trifft, und verbinde diesen Durchschnittspunct mit dem gegebenen Puncte durch eine gerade Linie, so ist, wenn man noch aus dem gegebenen Puncte nach der Mitte der halbirten Seite eine gerade Linie zieht, das ganze Dreyeck in zwey gleiche Vierecke getheilt.

§. 293.

Zusatz. Auch kann das Dreyeck aus dem darin gegebenen Puncte in mehrere gleiche oder verhältnißmäßige Theile eingetheilt werden.

§. 294.

Aufgabe. Ein Dreyeck durch eine Linie, welche mit irgend einer Seite desselben gleichlaufend ist, in zwey gleiche Stücke zu theilen.

Auflösung. Man halbire die Dreyecksseite, womit die zu findende Linie parallel seyn soll, errichte aus ihrer Mitte ausserhalb des Dreyecks ein Loth, welches dieser halben Seite gleich ist, ziehe aus einem ihrer Endpuncte nach dem Ende dieses Lothes eine

Hypotenuse, beschreibe mit ihr, als Halbmesser, einen Bogen, der die halbirte Seite schneidet, ziehe durch diesen Punct eine gleichlaufende Linie mit jener Dreyecksseite, woran der Mittelpunct des Bogens liegt, bis sie die andere Dreyecksseite durchschneidet, und endlich durch diesen letzten Punct eine Parallele mit der ersten Seite des Dreyecks, so ist dessen Theilung, der Forderung gemäß, vollbracht.

Beweis. Beruht vorzüglich auf dem Satze, daß sich ähnliche Dreyecke wie die Quadrate ähnlich liegender Linien in ihnen verhalten.

§. 295.

Zusatz. Wie das gegebene Dreyeck durch solche Parallellinien in mehrere entweder gleiche oder verhältnißmäßige Theile zu theilen ist, wird man nun auch (vermittelst §. 294 und §. 115.) finden.

§. 296.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreyeck durch drey gerade Linien, welche von dessen Winkelpuncten nach einem Puncte in seiner Ebene zusammentreffen, in drey gleiche Theile zu theilen. Wo liegt dieser Punct?

Auflösung. Man nehme von einer Seite den dritten Theil, ziehe aus dem Theilungspuncte nach der gegenüberliegenden Spitze eine gerade Linie, und durch eben diesen Punct eine Parallele mit der ihm zunächst liegenden Dreyecksseite, so liegt der gesuchte Punct in der Mitte dieser Linie.

Beweis. Dieser wird, aus Construction der Linien, leicht gefunden werden.

§. 297.

Aufgabe. Ein Parallelogramm durch eine gerade Linie in zwei gleiche Vierecke zu theilen, welche nicht wieder Parallelogramme sind.

Auflösung. Wenn man die größte Diagonallinie darin zieht, dieselbe halbirt, und um diesen festen Punct im Kreise herumbeweget, so entspricht sie in jeder Lage der Forderung der Aufgabe.

§. 298.

Aufgabe. Ein Parallelogramm durch zwey aus einem Winkelpuncte gezogene gerade Linien in drey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Nachdem man von dem Winkelpuncte, der dem gegebenen gegenüberliegt, auf jeder der zwey anliegenden Seiten des Parallelogramms den dritten Theil derselben genommen hat, ziehe man aus diesen Theilungspuncten nach der gegebenen Winkelspitze zwey gerade Linien, so entstehen hierdurch die drey gleichen Theile.

§. 299.

Zusatz. Auf ähnliche Weise kann das Parallelogramm hierdurch in vier, fünf, sechs u.s.f. gleiche Theile eingetheilt werden. Bey jeder geraden Zahl dieser gleichen Theile ist eine der Theilungsli-

nien die Diagonale des Parallelogramms; bey jeder ungeraden Zahl solcher Theile aber nicht.

§. 300.

Aufgabe. Ein Paralleltrapez auf leichte Art in beliebige gleiche oder verhältnißmäßige Theile zu theilen.

Auflösung. Wenn man die beyden Parallelseiten in die verlangte Anzahl gleicher oder verhältnißmäßiger Theile theilet, und die Verbindungslinien zieht, so ist die Aufgabe aufgelößt.

Der geometrischen Wissenschaftslehre dritter Cursus.

Practische Elementargeometrie.

Practische Elementargeometrie.

I. Vom Messen gerader Linien.

§. 301.

Erklärung. Die practische Elementargeometrie ist jener Theil der Geometrie überhaupt, welcher lehrt, wie Linien, Flächen und Körper, welche man an wirklichen Dingen betrachten kann, gemessen, d. h. nach ihrer Größe bestimmt werden können.

§. 302.

Anmerkung. Diese Anwendung der Geometrie auf das bürgerliche Leben hat einen sehr großen Umfang. Hier kann nur von der practischen Linien- und Flächenmessung, und von dieser nur nach ihren allerersten Elementen gehandelt werden.

§. 303.

Erklärung. Auch bey dem practischen Feldmessen ist der Fuß die willkührliche Einheit, welche bald in 10, bald in 12 gleiche Theile abgetheilt wird. Jenes giebt das Decimalmaaß, dieses das Werkmaaß. Obschon sowohl die Größe des Fußes, als auch der Ruthe in verschiedenen Ländern sehr verschie-

der ist, so folgt der Geometer bey seinen Messungen und Rechnungen am Bequemsten der Decimal-Eintheilung, indem er die landesübliche Ruthe in 10 gleiche Theile theilet.

§. 303. *a.*

Zusatz. Zur Verwandlung der Decimalschuhe in Duodecimalfüße, und umgekehrt, dienet folgendes Verfahren. Man nenne D den zehntheiligen und d den zwölftheiligen Fuß, so ist $10D = 12d$, folglich $D = 1,2d$, und $d = \frac{10}{12}D$, oder $d = \frac{5}{6}D$. — Beyspiele zur Uebung sind leicht zu berechnen.

§. 304.

Erklärung. I. Um gerade Linien, theils auf dem Papiere, theils auf dem Felde zu ziehen und ihre Größe zu bestimmen, bedient man sich verschiedener Werkzeuge. Die einfachsten davon sind: das gewöhnliche Lineal, das Winkellineal, der Cirkel, die Meßkette, Meßruthe oder Meßschnur, die Meßstäbe und die Meßpflöcke.

II. Das einfache Lineal ist eine aus hartem Holze, Metall oder einer andern festen Materie verfertigte dünne, willkührlich breite und vielmal längere Platte, welche die nöthige Eigenschaft haben muß, daß die beyden Kanten, so viel es seyn kann, gerade Linien bilden. In je höherem Grade dieses die Kunst erreicht, desto näher kömmt die Kante des Werkzeugs seinem Ideale, d. h. der geraden mathematischen Linie. Sein Gebrauch

besteht darin, daß man es an zwey physische Puncte, so scharf dies möglich ist, anleget, und nun mit einem zugespitzten Körper, z. B. dem Bleystifte, oder der Reisfeder, von einem dieser Puncte auf dem Papier gegen den andern hinfährt, und dieselbe mit einer zarten physischen Linie verbindet, welches das Sinnbild der geometrischen ist.

III. Das Winkellineal ist eine Verbindung von zwey einfachen Linealen, welche dergestalt zusammengefügt sind, daß ihre äussere Kanten einen rechten Winkel bilden. Je genauer dieses Statt findet, desto vollkommener ist das Instrument. Es dient, um entweder aus dem Endpuncte oder aus einem andern Puncte in oder ausser einer geraden Linie ein Loth auf sie zu errichten. Man legt nämlich die eine Kante des Lineals dergestalt auf die gerade Linie, daß sein Scheitelpunct auf den bestimmten Punct in derselben fällt; oder so, daß der Punct ausser der geraden Linie in dem einen Schenkel des Lineals, die gerade Linie aber sich in dessen anderm Schenkel befindet, und zieht nun längs des den rechten Winkel bildenden Schenkels eine feine physische Linie.

IV. Der Cirkel besteht meist aus zwey messingenen, charnierartig verbundenen Seitenstücken, worin sich zwey stählerne Füße befinden, welche nach Unten wohl zugespitzt sind. Seine Güte hängt von der gleichen Länge der Füße, ihrer leichten Beweglichkeit und der Feinheit ihrer Spitzen ab. Sein Gebrauch ist, entweder eine auf dem Papiere gezogene

unbestimmte gerade Linie einer gegebenen geraden gleich zu machen, oder aus einem bestimmten Puncte, mit einem gegebenen Halbmesser, einen Kreis zu beschreiben u. s. w.

V. Die Meßruthe ist der Maaßstab für gerade Linien auf dem Felde. Sie besteht aus einer geraden, eine oder zwey Ruthen langen Stange von gerad-faßerigem, wohl ausgetrokneten und mit Oelfarbe überzogenen Holze. Sie ist durch eingeschlagene Nägel in Fuße und Zolle abgetheilt, auch an beyden Enden mit Metall beschlagen.

Meßschnüre sind Stricke, welche eine oder mehrere Ruthen lang, ebenfalls in halbe Ruthen und Fuße abgetheilt, aber minder brauchbar für die Ausübung sind, weil feuchte oder trockene Witterung ihre Länge leicht verändert.

Meßketten sind weit zweckmäßiger. Sie bestehen aus Gliedern von Eisendrath, welche durch messingene Ringe verbunden sind. Jedes Glied ist einen Fuß lang. Auch wird das Ende jeder halben und ganzen Ruthe angedeutet. Ihre Länge kann drey Ruthen betragen. An jedem Ende befindet sich ein größerer Ring, der zur Handhabe dient, um die Kette gehörig anzuspannen.

VI. Die Meßstäbe sind gerade, runde, ungefähr sechs Fuß lange Stäbe von festem Holze, welche an dem einen Ende zugespitzt und mit Eisen beschlagen sind, damit sie desto bequemer in die Erde eingeschlagen werden können. Ihr Gebrauch wird sich sogleich zeigen. Um sie auf dem Felde in großer Entfernung

sichtbar zu machen, pflegt man an ihr oberes Ende ein Fähnchen von farbigem Zeuge zu befestigen.

VII. Die Meßpflöcke sind kleine, etwa anderthalb Fuß lange, an einem Ende wohl zugespitzte, mit Eisen beschlagene, runde hölzerne Stäbe. Sie stellen dasjenige auf dem Felde vor, was ein zarter physischer Punct auf dem Papier, oder ein geometrischer in Gedanken bedeutet. Ihr Gebrauch wird bald deutlich werden.

§. 305.

Anmerkung. Es ist nöthig, daß sämmtliche Werkzeuge, welche hier blos mit den Worten erklärt worden sind, dem Schüler wenigstens in Modellen vorgezeigt werden, damit die eigne Anschauung dasjenige berichtige und ergänze, was an Deutlichkeit der Einsicht fehlt.

Eben dieser Deutlichkeit wegen, muß auch der folgende Vortrag der practischgeometrischen Elementarlehren etwas wortreicher seyn.

§. 306.

Aufgabe. Eine gerade Linie auf dem Felde abzustecken und zu messen.

Gesetzt, die Gegenstände A u. B (Fig. 135) befänden sich auf einem ebenen Felde. Man soll die Größe der geraden Linie von A bis B nach Ruthen und Fußen bestimmen, wobey vorausgesetzt wird, daß sich zwischen A und B kein Hinderniß befindet, welches das unmittelbare Messen unmöglich macht.

Auflösung. I. Man errichte sowohl in A als in B einen Meßstab dergestalt, daß jeder mit der Ebene der Erde auf allen Seiten rechte Winkel bildet, d. h. so, daß jeder Stab lothrecht auf der Erde steht. Mit einiger Uebung wird man dies leicht zu Stande bringen. Diese Meßstäbe stellen nun die zwey Puncte vor, zwischen welchen nur eine gerade Linie möglich ist. Diese gerade Linie AB ist daher sowohl der Lage, als der Größe nach bestimmt, d. h. abgesteckt.

II. Man lege das eine Ende der Meßkette, oder der Meßruthe, an den Stab in A auf die Erde. Ein Gehülfe halte an das andere Ende einen zweiten Stab in senkrechter Richtung auf die Erde, und bewege ihn so lange von der einen Seite nach der andern, bis das Auge hinter dem ersten Stabe in A, welches nach jenem in B visiret, diesen mittleren Stab nicht mehr wahrnimmt. Dieses Visiren muß in einer Entfernung von etwa zwey Schritten hinter dem Stabe A, und so geschehen, daß man z. B. bey geschlossenem linken Auge mit dem rechten längs der rechten Seite dieses Stabes nach jenem in B hinblickt. Der eingesteckte mittlere Stab befinde sich nun in C, so sind die Puncte A, C und B in einer geraden Linie ACB, und C ist um die Länge der Meßkette, oder der Meßstange von A entfernt.

III. Nun lege man das eine Ende des Maaßstabes an den Stab in C, der Gehülfe bewege an dessen anderm Ende in D einen auf dem Boden senkrecht stehenden Stab so lange hin und her, bis dieser Stab

in D, bey dem Visiren von C nach B, nicht mehr gesehen wird. Die Linie von A nach D liegt wieder in der geraden Linie AB, und ist der doppelten Länge des Maaßstabes gleich.

IV. Auf ähnliche Art fahre man fort, und bemerke, wie oft das Anlegen des Maaßstabes durch die Stäbe C, D, E, F, G, H, I, K, L bis nach B geschehen ist. So oft dieses geschah, so oft enthält die zu messende Linie AB den Maaßstab. Wenn der Raum von dem letzten Stabe in L nach B kleiner ist, als der ganze Maaßstab, so bestimme man diese Linie LB durch die Menge von Fußen, die sie enthält.

§. 307.

Anmerkung. Selten ist die Fläche des Feldes, worauf die geraden Linien gemessen werden sollen, so eben, daß man, ohne merklichen Fehler, die Meßkette gerade auf sie hinlegen dürfte. Oft finden sich kleine Vertiefungen und Erhöhungen, oder andere Hindernisse, z. B. kleine Gräben, niederes Gesträuch u. s. w. vor, welche das Auflegen der Kette oder des Ruthenmaaßes nicht gestatten.

In diesen Fällen muß man die Kette über diesen Hindernissen hinweg, so viel es seyn kann, gleichlaufend mit dem Boden anspannen, oder eben so das Ruthenmaaß anlegen.

§. 308.

Erklärung. Um gerade Linien, deren Größe man auf dem Felde durch das wirkliche Messen (§ 306) bestimmt hat, auf das Papier zu verzeichnen, dient der verjüngte Maaßstab. Man nimmt eine willkührliche kleine gerade Linie auf dem Papiere für eine Ruthe an, und erhält, durch eine besondere

Construction, die Größe der Fuße und Zolle. Hierdurch bekömmt man Linien auf dem Papiere, die sich so zu den Linien auf dem Felde verhalten, wie der verjüngte Maaßstab zum Feld-Maaßstabe. Wie wichtig dieser verjüngte Maaßstab für die practische Geometrie ist, werden die sogleich folgenden Anwendungen zeigen.

§. 309.

Aufgabe. Einen verjüngten Maaßstab zu verzeichnen.

Auflösung. Wenn (Fig. 136.) AB die Größe einer Ruthe bedeutet, so ist Ab ein Fuß, und man wird sich leicht aus Construction der übrigen Linien überzeugen, daß die kleinen Linien a1, b2, c3, d4, e5, f6, g7, h8, m9 der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Zolle bedeuten.

§. 310.

Zusatz. I. Soll man auf dem Papiere eine gerade Linie ziehen, welche eine gegebene Menge von Ruthen enthält, so fasse man die Linie AB so oft in den Cirkel, als diese Ruthenzahl beträgt. Der Bequemlichkeit wegen kann aber der Maaßstab über E hinaus so weit fortgesetzt werden, bis man eine Linie von etwa zehn Ruthen bekömmt. Diese aufgefaßte Linie wird sodann auf die gezogene Linie getragen.

II. Bestände die zu construirende Linie aus Ruthen und Fußen, so nimmt man die ersteren auf den vor EB vorhergehenden Linien, letztere aber auf BA von B ge-

gen A hin. So ist Eh = 1° 3′; Ed = 1° 7; Eb = 1° 9′ u. s. f. Ferner wäre EB + Ef = 2° 5′; 2 EB + Eh = 3° 3′; 4 EB + Ek = 5° 2′ u. s. f.

III. Soll man Zolle allein greifen, so findet man sie auf den Querlinien des Dreyecks GDB oder CAb. Denn a1 ist 1 Zoll; b2 sind 2 Zolle; g7 sind 7 Zolle; m9 sind 9 Zolle u. s. w. Wollte man aber Schuhe und Zolle zusammenfassen, so müssen sie in den Parallellinien über AB gegriffen werden. So ist die Linie x2 = 4′ 2″, die y6 = 6′ 6″, die z8 = 3′ 8″, die t9 = 7′ 9″ u. s. f.

IV. Sollen Ruthen, Fuß und Zolle zusammengenommen werden, so nehme man auf den mit AB parallelen und zur Rechten von DB verlängerten Linien die Ruthen, die Schuhe und Zolle aber nach III, so, daß man alles auf einmal greifet. Es ist nämlich die Linie Rx = 1° 4′ 2″, die Sy = 1° 6′ 6″, die Wt = 1° 7′ 9″ u. s. w.

§. 311.

Anmerkung. Wollte man für die Größe der Feldruthe die Linie AB annehmen, so würde eine Länge von etwa zwanzig Ruthen einen sehr großen Raum auf dem Papiere erfodern. Daher kann man diese Linie AB für zehn Ruthen gelten lassen, wodurch AB = 1° wird. Die kleinen Querlinien a1, b2 u. s. w., die vorhin Zolle waren, werden nun Schuhe vorstellen. Hieraus folgt, daß man die Größe einer Ruthe auf dem Papiere verhältnißmäßig, d. h. mit Berücksichtigung der Größe dieser Linien auf dem Felde, und der Größe des Papiers u. s. f. annehmen müsse.

§. 312.

Anmerkung. Aus dem Vorhergehenden sieht man, worauf sich das unmittelbare Messen der Linien auf dem Felde gründet. Er setzt voraus, daß man den Maaßstab unmittelbar in die zu messende Linie legen kann. Dies ist nicht immer möglich, ja es treten oft Fälle ein, wo man Entfernungen bestimmen soll, die sich, wegen mancherley Hindernissen, nicht unmittelbar messen lassen. Zur Auflösung solcher Fälle muß sich die Theorie mit der Praxis verbinden. Folgende Beyspiele werden dies deutlich machen.

II. Das Messen der Entfernungen mit einfachen Werkzeugen.

§. 313.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Gegenstände auf dem Felde zu messen, welche, wegen eines dazwischen liegenden Hindernisses, nicht unmittelbar bestimmt werden kann.

Man soll (Fig. 137.) die gerade Linie von A nach B bestimmen. Ein Hinderniß, z. B. ein Sumpf, ein Haus, eine Mauer u. s. f. verstattet nicht, von A nach B unmittelbar zu messen.

Auflösung. I. Man wähle sich einen Punct C zum Standpuncte, aus welchem man nach A und B ungehindert sehen und messen kann.

II. Man messe die gerade Linie AC und trage sie geradlinig zurück in E, so daß CE = AC. Desgleichen messe man die BC, und trage sie in ihrer Verlängerung rückwärts in D so, daß BC = CD.

III. Wird nun von D nach E die gerade Linie DE gemessen, so muß diese der zu messenden AB gleich seyn.

Beweis. Ergiebt sich aus der Congruenz der Dreyecke ACB und ECD.

§. 314.

Zusatz. I. Könnte man, wegen eines Hindernisses, diese ganzen Linien CA und CB nicht zurück in E und D tragen, so trage man ihre Hälfte (z. B. CH und CG), ihren dritten oder vierten Theil rückwärts. Die gerade Linie (GH), welche nun die Endpuncte verbindet, muß die Hälfte, der dritte oder vierte Theil von der Linie AB seyn.

II. Wenn es durchaus unmöglich wäre, die Linien CA und CB um irgend einen bestimmten Theil rückwärts zu verlängern, so kann man einen bestimmten Theil derselben, etwa den dritten oder vierten, von C gegen A, und von C gegen B tragen, und die Endpuncte dieser Stücke durch eine gerade Linie verbinden. Wäre z. B. $CM = \frac{1}{3} CA$ und $CN = \frac{1}{3} CB$, so muß auch $MN = \frac{1}{3} AB$ seyn.

§. 315.

Aufgabe. An das Ende einer geraden, auf dem Felde gegebenen Linie einen Winkel zu legen, der einem andern, ebenfalls auf dem Felde befindlichen, gleich ist.

Es seyen (Fig. 138.) A, B und C drey Stäbe, welche die geraden Linien AB und BC bestimmen,

die in B den W. ABC bilden. Man soll an den Endpunct C einen W. BCH = W. ABC legen.

Auflösung. I. Man trage von B gegen A und gegen C eine bekannte Länge, z. B. BD = BE = 3° und messe die gerade Verbindungslinie DE.

II. Nun trage man von C gegen B die Linie CF = BE, befestige sowohl in F als in C eine Meßkette, nehme auf jener eine Linie = DE, auf dieser eine Linie = CF und bewege dieselbe, indem man beyde ausspannt, so lange hin und her, bis sie in dem Puncte G sich berühren.

III. In diesen Punct G stecke man einen Stab und ziehe eine gerade Linie CGH, so ist W. BCH = W. ABC.

Beweis. Denn die Dreyecke DBE und FCG sind congruent.

§. 316.

Zusatz. Auf dem Papiere wird diese Aufgabe vermittelst des Cirkels, auf ähnliche Weise, gelößet. Man greift nämlich aus dem Scheitel des gegebenen Winkels ABC auf seinen Schenkeln eine willkührliche Linie BD = BE, trägt dieselbe aus C auf CB in F und beschreibt nun mit dem andern Cirkelfuße gegen H hin einen Bogen. Nun faßt man die DE in den Cirkel, setzt dessen einen Fuß in F, und beschreibt einen zweyten Bogen, der den ersten in G schneidet. Wird nun die gerade Linie CGH gezogen, so ist W. ABC = W. BCH.

§. 317.

Aufgabe. Den Abstand zweyer Gegenstände auf dem Felde zu bestimmen, welche eine solche Lage haben, daß man nur zu dem einen kommen und messen kann.

Es seyen A und B (Fig. 139.) die beyden Gegenstände, deren Entfernung gemessen werden soll. Der eine B hat eine solche Lage, daß man wegen eines besondern Hindernisses, z. B. wegen eines Sumpfes oder See's, nicht zu ihm kommen und messen kann.

Auflösung. I. Man wähle einen Standpunct C, der so gelegen ist, daß man bequem nach A messen kann.

II. Man messe CA wirklich, trage sie in ihrer Verlängerung rückwärts, so daß CD = CA und lege an D einen Winkel CDF = W. CAB.

III. Man verlängere DF so lange, bis man in einen Punct E kömmt, der mit C und B in einerley geraden Linien liegt, welches dann Statt findet, wenn die Stäbe in B und E den mittlern Stab bedecken.

IV. Man messe die Linie ED, so muß ED = AB seyn.

Beweis. Folgt wieder aus der Congruenz der Dreyecke CAB und CDE.

§. 318.

Zusatz. Wenn man verhindert ist, die ganze Linie CA zurückzutragen, so kann man ihre Hälfte,

oder ihr Drittel dafür nehmen, wo denn die gefundene Linie die Hälfte, oder das Drittel der zu messenden Linie AB seyn muß.

§. 319.

Aufgabe. Man soll die Entfernung zweyer Gegenstände bestimmen, unter der Voraussetzung, daß man zu keinem von ihnen unmittelbar messen kann.

Man soll (Fig. 140.) die Entfernung AB messen, ohne daß man weder nach A, noch nach B kommen kann.

Auflösung. I. Man wähle zwey Standpuncte C und D, und finde (nach §. 317.) die Linie EG = AD.

II. Man wähle noch den dritten Standpunct F und bestimme auch hier wieder die Entfernung MH = BD.

III. Man verlängere die Linien AD und BD rückwärts, nehme DO = EG, DN = HM und messe die Verbindungslinie NO, so hat man auch das Maaß von AB gefunden.

Der Beweis folgt leicht aus dem Vorhergehenden.

III. Figuren auf dem Felde in den Grund zu legen.

§. 320.

Erklärung. Eine Figur in den Grund legen heißt, auf dem Papiere nach dem verjüngten

Maaßstabe eine Figur construiren, welche der auf dem Felde gegebenen ähnlich ist.

§. 321.

Anmerkung. Dergleichen Figuren auf dem Felde sind Grundstücke von verschiedener Art, z. B. Aecker, Wiesen, Gärten u. s. w. Obgleich nun ihre Grenzen nicht nach vollkommen geraden Linien bestimmt sind, so kann man dieselbe doch meist als solche annehmen, indem man sich gerade Linien vorstellt, welche die gesammten Winkelpuncte verbinden, wodurch das Grundstück auf eine geradlinige geometrische Figur reducirt wird. Wie krummlinige Grenzlinien zu behandeln sind, folgt weiter unten.

§. 322.

Aufgabe. Eine auf dem Felde gegebene Figur in den Grund zu legen, wenn ihre Grenzen als gerade Linien zu betrachten sind.

Es sey (Fig. 141.) ABCDE die Figur auf dem Felde. Man soll eine ihr ähnliche auf dem Papiere verzeichnen.

Auflösung. I. Man stecke in alle Winkelpuncte A, B, C, D und E der gegebenen Figur senkrechtstehende Meßstäbe, so ist dieselbe durch die mathematischen Linien AB, BC, CD, DE und EA, welche man sich in Gedanken vorstellt, begrenzt.

II. Man theile diese Figur durch Querlinien, z. B. durch EB und EC in die Dreyecke AEB, BEC und CED, und wähle hierzu solche Linien, welche, nach den vorhandenen Umständen, am Bequemsten gemessen werden können.

III. Man messe von jedem dieser Dreyecke die drey Seiten auf dem Felde, und schreibe das gefundene Maaß einer jeden auf die zugehörigen Linien einer aus freyer Hand gezeichneten Figur, welche mit der gegebenen gleichviele Seiten und ähnlich liegende Querlinien hat.

IV. Nun ziehe man auf dem Papiere eine gerade Linie ae, mache sie mit dem Cirkel nach dem verjüngten Maaßstabe so groß, als AE nach dem Feldmaaßstabe ist. Desgleichen beschreibe man aus a und e mit zwey Linien ab und eb, welche nach dem verjüngten Maaßstabe so viel halten, als AB und EB nach dem großen, zwey sich in b schneidende Bogen. Zieht man nun ab und eb, so ist das Dreyeck aeb dem Dreyecke AEB ähnlich.

V. Auf gleiche Weise wird über eb das ähnliche kleine Dreyeck ecb und über ec das ähnliche Dreyeck ecd beschrieben, wodurch die Figur abcde der Figur ABCDE ähnlich wird.

Der Beweis wird jedem leicht zu finden seyn, der die bisherigen Lehren gefaßt hat.

§. 323.

Aufgabe. Eine Figur in den Grund zu legen, welche theils von geraden, theils von krummen Linien eingeschlossen ist.

Es sey (Fig. 142.) ABCDIHA die gegebene Figur auf dem Felde, welcher man eine ähnliche auf dem Papiere construiren soll.

Auflösung. I. Nachdem man an die Winkelpuncte ABCDE Stäbe gesteckt hat, nehme man in der krummen Linie EIHA so kleine Stücke, daß man sie, ohne großen Fehler, für gerade betrachten kann, und bemerke sich dieselbe durch die Stäbe in K, I, H, G und F.

II. Vermittelst eines großen, aus zwey Lattenstücken verfertigten rechten Winkels (oder durch das sogenannte Winkelkreuz, dessen Einrichtung der Lehrer hier zu erklären hat) bestimme man in der Linie AE die Puncte L, M, N, O, P, in welchen die Lothe von F, G, H, I, K, in AE eintreffen, und messe die Linien AL und LF, LM und MG, MN und NH, NO und OI, OP und PK. Alle diese Maaße trage man wieder auf ähnlich liegende Linien einer aus freyer Hand verfertigten Zeichnung.

III. Nun construire man auf dem Papiere eine Figur abcde, welche ABCDE ähnlich ist, mache al = AL, lm = LM, mn = MN, no = NO, op = OP, errichte die Lothe lf = LF, mg = MG, nh = NH, oi = OI, pk = PK, und verbinde a, f, g, h, i, k, e, durch eine zusammenhängende krumme Linie, so muß die kleine Figur der großen ähnlich seyn.

§. 324.

Zusatz. Auf ähnliche Weise läßt sich eine durchaus von unregelmäßigen krummen Linien begrenzte Figur in den Grund legen, indem man eine geradlinige in sie beschreibt, und die krummen Abweichungen durch Lothe bestimmt. Es ist sehr nützlich,

mehrere Fälle dieser Art durch wirkliche Zeichnungen zu erläutern.

§. 325.

Anmerkung. Die Methode, krummlinige Figuren, in welchen man zu messen verhindert ist, z. B. einen See, einen District im Walde u. s. w. in den Grund zu legen, indem man sie von Aussen in geradlinige einschließen, und sämmtliche Seiten und Winkel durch die seitherigen Meßgeräthschaften bestimmen kann, bleibt dem mündlichen Vortrage überlassen. Dahin gehören auch jene Aufgaben, wo z. B. eine gerade Linie verlängert werden soll, obgleich undurchsichtige Zwischenkörper, z. B. Mauern oder Gebäude, im Wege stehen. Ueberhaupt wird der Lehrer diesen Vortrag durch schicklich gewählte Aufgaben sehr leicht erweitern können, wenn dieses das Bedürfniß oder der Wunsch des Schülers erforderte.

§. 326.

Anmerkung. In dem Bisherigen ist das Wesentlichste des einfachen oder niedern Feldmessens enthalten. Zu der höheren Feldmeßkunst werden besondere Werkzeuge erfordert, die nun nach ihrer Einrichtung und Anwendung kürzlich beschrieben werden sollen. Die einfachsten davon sind: der Meßtisch, der Winkelmesser oder das Astrolabium und der Transporteur.

IV. Das Messen mit künstlichern Geräthschaften.

§. 327.

Erklärung. Der Meßtisch, eine Erfindung von Johann Prätorius, der als Prof. der

Mathem. zu Altdorf ums J. 1616 gestorben ist, besteht aus drey Stücken: dem Gestelle, dem Tischchen und der Verbindung zwischen beyden. Das Gestelle ist aus drey Füßen, deren jeder etwa vier Schuhe lang ist, zusammengesetzt. Diese sind an einem gemeinschaftlichen Brettchen so beweglich, daß dasselbe, durch ihre Verengung oder Erweiterung, höher oder tiefer gestellt werden kann. Das eigentliche Tischchen ist eine viereckige, meist quadratische, sehr wohl geebnete, hölzerne Tafel von etwa 18 bis 24 Zollen in Länge und Breite, auf welche man das Papier spannt, um die verschiedenen Linien und Winkel darauf zu zeichnen. Die Verbindung zwischen beyden bildet der Aufsatz mit dem sogenannten Nußgelenke, vermittelst dessen das Tischchen nicht nur horizontal, sondern auch vertical und schief gestellt werden, und in jeder Lage durch eine Stellschraube befestigt werden kann.

Zum wirklichen Gebrauche des Meßtisches gehört noch 1) das Dosen-Niveau, welches als Setzwage dient zum Horizontalstellen des Tisches; 2) die Zange mit dem Lothe, um einen Punct auf dem Tischchen lothrecht über einen Punct auf dem Felde zu stellen, oder umgekehrt; endlich 3) das Diopterlineal, um von einem Puncte auf dem Felde, d. h. von einem Stabe gegen den andern zu visiren, und hierdurch eine Linie auf dem Tischchen zu ziehen, welche eben diese Richtung, wie eine andere hat, die man sich auf dem Felde von diesem einen Stabe gegen den andern vorstellt.

§. 328.

Erklärung. I. Der Winkelmesser oder das Astrolabium ist ein Werkzeug, wodurch man die Größe eines Winkels auf dem Felde unmittelbar nach Graden und Minuten bestimmen kann. Es besteht aus einem Halbkreise von Messing, der in seine Graden und Minuten getheilt, und in dessen Mittelpuncte ein Diopterlineal so angebracht ist, daß es um denselben bewegt werden kann, wodurch die Größe der Winkel bestimmt wird, welche zwischen dem hin und hergedrehten Lineale liegen. Dieses Instrument befindet sich auf einem Gestelle von drey Füßen, wie bey dem Meßtische, damit es in jede beliebige Lage gebracht werden kann.

II. Der Transporteur ist ein kleinerer oder größerer, meist aus einer dünnen Messingplatte verfertigter, in 180° Grade und in Theile von Graden genau eingetheilter Halbkreis, vermittelst dessen man einen nach Graden gegebenen Winkel auf das Papier tragen, oder umgekehrt einen auf dem Papiere gegebenen Winkel nach Graden messen kann. Die Güte dieses Werkzeugs hängt theils von der sehr scharfen Eintheilung des Halbkreises, theils davon ab, daß dasselbe eine etwas bedeutende Größe hat.

§. 329.

Anmerkung. Sehr zu wünschen ist es, daß alle angedeutete Werkzeuge entweder selbst, oder wenigstens nach guten Modellen, den Schülern vorgezeigt werden können, indem auch die besten Erklärungen dieser Geräthschaften noch einige Undeutlichkeit zurück lassen.

§. 330.

Aufgabe. Einen Winkel auf dem Papiere zu zeichnen, welcher einem auf dem Felde gegebenen gleich ist.

Man soll den Winkel zeichnen, der entsteht, wenn man sich (Fig. 143.) aus C zwey gerade Linien nach den Gegenständen in A und in B vorstellt.

Auflösung. I. Mit dem Meßtische.

Nachdem man in die Puncte A und B Meßstangen, und in C einen Pflock gesteckt hat, stelle man das Tischchen defg durch die Setzwage horizontal, und vermittelst des Senkbleyes dergestalt über den Punct C, daß der auf demselben durch eine feine Nadel bemerkte Punct c lothrecht über C ist. Nun lege man das Diopterlineal an c, verschiebe es so lange, bis man durch dasselbe den Meßstab in A erblickt, und ziehe nun auf dem Tischchen, mit wohlzugespitztem Bleystifte, die Linie ac. Ferner drehe man dies Lineal so um c, daß man auch den Stab in B wahrnimmt, und ziehe die Linie bc, so ist der auf dem Tischchen entstandene Winkel acb dem auf dem Felde gegebenen Winkel ACB gleich.

II. Mit dem Winkelmesser.

Man stelle das Instrument so über den Punct C auf dem Felde, daß c lothrecht darüber liegt. Ferner bringe man es in eine horizontale Lage, visire sowohl nach A in B und bestimme hierdurch die zwischen den

beyden Schenkeln ca und cb auf dem Instrumente bemerkte Menge von Graden. Nun ziehe man eine beliebige gerade Linie aufs Papier und trage durch den Transporteur einen Winkel an ihren Endpunct, welcher dem durch den Winkelmesser bestimmten gleich ist.

Der Beweis ist keiner Schwierigkeit unterworfen.

§. 331.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Gegenstände auf dem Felde zu bestimmen, die nicht unmittelbar gemessen werden kann.

Von A nach B (Fig. 143.) kann man wegen eines Hindernisses nicht messen, wohl aber aus A nach C und aus B nach C. Man soll die Entfernung AB finden.

Auflösung. I. Mit dem Meßtischchen. Man stelle es horizontal mit dem Puncte c lothrecht über C, visire nach A und nach B und ziehe die ac und bc. Nun messe man die Linien AC und BC mit dem Feldmaaßstabe, trage jene nach dem verjüngten Maaßstabe aus c in a, diese aus c in b und ziehe die ab. Wird letztere mit dem verjüngten Maaßstabe gemessen, so hält die AB eben so viele Ruthen und Fuße nach dem Feldmaaße.

II. Mit dem Winkelmesser.

Nachdem man den W. ACB gemessen hat, trage man ihn durch den Transporteur aufs Papier, mache

jeden Schenkel nach dem verjüngten Maaßstabe dem ähnlich liegenden nach dem Feldmaaße gleich und messe die Verbindungslinie mit dem kleinen Maaße, so ist dies wieder das Maaß der Linie auf dem Felde.

Beweis. Die Aehnlichkeit des kleinen und großen Dreyecks wird leicht nachgewiesen werden.

§. 332.

Anmerkung. Die Frage, welches von beyden Verfahren den Vorzug verdiene, wird der Lehrer bey dem Vortrage erörtern.

§. 333.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Gegenstände zu finden, deren einer aus dem gewählten Standpuncte unzugänglich ist.

Aus dem Puncte C (Fig. 144.) kann man nach A und nach B visiren, aber nur nach A messen. Man soll AB bestimmen.

Auflösung. A) Durch den Meßtisch.

I. Nachdem man in A und B Meßstäbe, und in C einen Pflock angebracht hat, stelle man das Instrument wagrecht über C, so daß c lothrecht darüber liegt, visire nach B und nach A, und ziehe die Linien cb und ca von unbestimmter Länge.

II. Man messe die CA auf dem Felde und trage sie, nach dem verjüngten Maaßstabe, auf dem Tischchen von c in a.

III. Man bringe den Meßtisch aus dem Stande in C, wohin man nun einen Meßstab stecket, in jenen

von A, wo man statt des Stabes einen Pflock anbringt, stelle ihn hier wagrecht und so, daß a lothrecht über A liegt. Man lege das Diopterlineal auf ac, drehe das Tischchen so lange in wagrechter Richtung, bis man von a nach c den vorigen Standpunct C wieder erblickt, wodurch die kleine Linie ac genau in die Richtung der Linie AC fällt.

IV. Endlich visire man aus a in B und ziehe die ab so lange, bis sie die schon gezogene Linie cb in b durchschneidet, so wird diese ab, mit dem verjüngten Maaßstabe gemessen, die Größe der AB nach dem Feldmaaße seyn.

B) Durch den Winkelmesser.

I. Man visire in C und A die beyden Winkel ACB und BAC, und bemerke sich ihre Größe in Graden und Minuten. Desgleichen messe man die Linie AC.

II. Diese gemessene AC trage man aus a in c nach dem verjüngten Maaßstabe aufs Papier, lege durch den Transporteur in a den W. acb = W. ACB, und in a den W. cab = CAB, so wird das Dreyeck abc dem Dreyecke ABC ähnlich seyn, und die gemessene Linie ab das Maaß von AB geben.

Der Beweis ergiebt sich wieder aus der Aehnlichkeit der Dreyecke.

§. 334.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Gegenstände zu bestimmen, unter der Voraussetzung, daß man zu keinem von ihnen gehen und messen kann.

Es sey AB (Fig. 145.) die zu bestimmende Weite, welche gefunden werden soll, ohne nach A oder nach B zu messen.

Auflösung. A) Mit dem Meßtische.

I. Man wähle eine Standlinie CD, welche eine solche Lage hat, daß man sie bequem messen, auch von C und D nach A und B visiren kann.

II. Man stelle den Tisch in horizontaler Lage über den Punct C, daß c senkrecht über C liegt, visire nach den in A, B und D befindlichen Stäben und ziehe auf dem Tischchen die willkührlich großen Linien ca, cb und cd.

III. Nun messe man die Standlinie CD, und trage sie nach dem verjüngten Maaßstabe von c in d.

IV. Man stelle jetzt den Meßtisch so in D, daß d lothrecht darüber ist, und drehe ihn in horizontaler Lage so lange, bis man nach der Richtung dc den Stab C erblickt, damit die Linie dc genau über DC liege.

V. Aus d visire man nun nach den Stäben in A und in B, ziehe die Linien da und db, welche die schon auf dem Tische gezogenen ca und cb in a und in b schneiden. Mißt man nun die ab nach dem verjüngten Maaßstabe, so ist die AB eben so groß nach dem Feldmaaßstabe.

B) Mit dem Winkelmesser.

I. Man bringe das Instrument über C, und messe hier die Winkel ACB und BCD. Desgleichen visire man aus D die Größe der Winkel BDA und ADC. Auch messe man die Standlinie CD.

II. Man trage die Größe von CD nach dem kleinen

Maaßstabe auf cd, lege an c, vermittelst des Transporteurs, den W. acb = W. ACB und W. bcd = W. BCD, desgleichen an d den W. bda = W. BDA und W. adc = ADC, so schneiden sich ca und da in a, cb und db in b, und die gemessene ab giebt wieder das Maaß von AB.

§. 335.

Zusatz. Sollte die Entfernung AB (Fig. 146.), die wegen eines Hindernisses, z. B. wegen Gesträuch, Wasser, Gebäuden u. s. w. nicht unmittelbar zu messen ist, bestimmt werden, so kann eine Standlinie CD bisweilen so gewählt werden, daß man von C nach A und von D nach B nicht nur visiren, sondern auch messen kann. Wie man in diesem Falle, sowohl durch den Meßtisch als durch den Winkelmesser, die Entfernung AB finden kann, wird jeder Nachdenkende sogleich finden.

§. 336.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Gegenstände zu messen, zu deren einem man nur kommen kann, ohne den Meßtisch aus dem ersten Stande zu verrücken.

Man soll die Entfernung AB (Fig. 147.) aus dem einzigen Standorte C messen.

Auflösung. I. Man setze den Meßtisch gehörig über C, visire nach B und nach A, ziehe cb und ca willkührlich, und trage die gemessene CA gehörig aus c in a.

II. In CA nehme man einen beliebigen Punct D,

und zwischen D und B einen ähnlichen Punct E, visire aus C in E, und ziehe die ce willkührlich.

III. Man messe die CD und CE, trage sie aus c in d, und aus c in e, ziehe die de, bis sie in ihrer Verlängerung die cb in b schneidet, und verbinde a und b durch ab, so ist ab das Maaß von AB.

Der Beweis ergiebt sich leicht aus den ähnlichen Dreyecken.

§. 337.

Anmerkung. Wie man die vorige Aufgabe durch den Winkelmesser auflösen könne, wird man aus dem Bisherigen leicht finden können.

§. 338.

Aufgabe. Die Weite zweyer Gegenstände, zu deren keinem man kommen kann, durch Hülfe des Meßtisches aus einem Standpuncte zu messen.

Es sey AB (Fig. 148.) die zu messende Weite. Man soll sie finden, ohne das Tischchen aus dem Stande C zu verrücken.

Auflösung. I. Man visire aus c in A, in B und in D, ziehe die ca, cb und cd unbestimmt, messe CD und trage sie aus c in d.

II. Nun stecke man in gerader Richtung mit B und D, z. B. in E, einen Stab, visire aus c in E, messe CE, trage sie aus c in e, und ziehe die de, bis sie verlängert die cb in b schneidet.

III. Nachdem man in F, dem Durchschnittspuncte von DA und CE, einen Stab gesteckt hat, messe man CF, trage ihr Maaß aus c in f, ziehe df, bis sie verlängert die ca in a schneidet, und verbinde nun a

und b durch ab, so ist wieder das Maaß von ab dem Maaße von AB gleich.

Der Beweis fließt wieder aus Aehnlichkeit der Dreyecke.

§. 339.

Anmerkung. Auch diese Aufgabe läßt sich durch den Winkelmesser auflösen.

§. 340.

Anmerkung. Die zwey letzten Aufgaben sind Beyspiele von dem Feldmessen aus einem Stande. Es gewährt den Vortheil, daß der Meßtisch unverrückt bleibt, wodurch immer kleinere oder größere Fehler vermieden werden.

§. 341.

Aufgabe. Eine Figur durch Hülfe des Meßtisches aus einem innerhalb derselben angenommenen Standpunct in den Grund zu legen; vorausgesetzt, daß man von demselben nach allen Winkelpuncten der Figur visiren und messen kann.

Die Figur ABCDEFG (Fig. 149.) soll aus dem Standpuncte H in den Grund gelegt werden, der so liegt, daß man aus ihm nach allen Grenzpuncten sehen und messen kann.

Auflösung. I. Man setze den Meßtisch gehörig über H, visire aus h nach allen in A, B, C, D, E, F, G befindlichen Stäben, und ziehe auf dem Tischchen die Linien ha, hb, hc, u. s. f. von unbestimmter Größe.

II. Man messe die HA, HB, HC u. s. w., trage sie aus h in a, in b, in c u. s. f. und ziehe ab, bc,

cd u. s. f., so ist die Figur abcdefg der großen ähnlich.

Der Beweis ist leicht.

§. 342.

Anmerkung. Auch durch den Winkelmesser kann diese Aufgabe, wie man leicht findet, aufgelößt werden.

§. 343.

Aufgabe. Eine Figur in den Grund zu legen, wovon man alle Grenzlinien und deren Winkel messen kann.

Es sey ABCDEF (Fig. 150.) die gegebene Figur, von welcher alle Seiten und Winkel bestimmt werden können.

Auflösung. I. Man stelle den Meßtisch über E, visire nach F und D, messe EF und ED und trage sie aus e in f, aus e in d.

II. Man setze den Tisch mit dem Puncte d über D, so daß man über de zurück nach E sieht, visire nach C, messe DC und trage sie aus d in c.

III Man bringe den Meßtisch mit c über C, so, daß man über die cd zurück in D sieht, visire nach B, messe CB und trage sie aus c in b.

IV. Auf ähnliche Weise fahre man für die übrigen Standpuncte fort, so bekömmt man für jeden neuen Winkelpunct einen größern Theil der Figur auf dem Meßtische. Der Standpunct C z. B. gab den Theil fedcb. In dem Standpuncte B visire man, nachdem der Meßtisch gehörig gestellt ist, nach A, messe BA, trage sie aus b in a und ziehe die af, so ist abcdef

und ABCDEF ähnlich, wobey man sich die Mühe, den Meßtisch über A zu stellen, ersparen kann. Doch ist die Probe nicht überflüßig, zu untersuchen, ob AF und af einerley Maaß haben.

Der Beweis gründet sich auf bekannte Sätze von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 344.

Anmerkung. Auch diese Aufgabe kann durch den Winkelmesser aufgelößt werden.

§. 345.

Aufgabe. Eine Figur, an welcher man nur eine Grenzlinie als Standlinie messen kann, durch den Meßtisch in den Grund zu legen.

Es sey (Fig. 151.) ABCDEF das gegebene Feld, welches aus den zwey Standpuncten E und D aufgenommen werden soll.

Auflösung. I. Nachdem man den Meßtisch über E gestellt hat, visire man nach F, A, B, C und D, ziehe aus e auf dem Tischchen die zugehörigen Linien von unbestimmter Größe, messe ED, und trage sie verjüngt aus e in d.

II Nun stelle man das Tischchen mit d über D, so, daß de über DE liegt, visire aus d nach F, A, B, C, so werden diese Visirlinien, die vorhin aus e gezogenen in den Puncten f, a, b und c schneiden. Zieht man nun ef, fa, ab und bc, so ist efabcd ähnlich EFABCD.

Den Beweis wird jeder leicht finden.

§. 346.

Anmerkung. Daß auch diese Aufgabe durch den Winkelmesser aufgelößt werden kann, bedarf kaum einer Erinnerung.

§. 347.

Anmerkung. Wenn die aufzunehmenden Figuren zum Theil von krummen Linien eingeschlossen sind, so werden diese von innen oder aussen durch gerade Linien begrenzt und die krummen Abweichungen durch die oben erklärte Perpendikelmethode bestimmt. Auch kann die gerade Linie öfters sehr zweckmäßig so gezogen werden, daß Stücke der krummen Linie zu ihren beyden Seiten liegen. Beyspiele an wirklichen Zeichnungen solcher Figuren dienen hier sehr zur Erläuterung.

§. 348.

Aufgabe. Eine in den Grund gelegte Figur auszurechnen.

Es sey (Fig. 142.) ABCDEKIHGF der Grundriß des auszumessenden Feldes.

Auflösung. I. Man ziehe AE und von B, C und D die Lothe BR, CS und DT, so kann man die Dreyecke ABR und TDE, so wie auch die Paralleltrapeze RBCS und SCDT leicht ausrechnen, deren Summe den Theil ABCDEA der Figur bildet.

II. Nimmt man nun in der krummen Linie AHIE die Puncte F, G, H, I und K so, daß die dazwischen liegenden Stücke ohne bedeutenden Fehler für gerade gehalten werden können, und zieht die Lothe FL, GM, HN, IO und KP, so zerfällt dieser Theil der Fläche in zwey rechtwinkelige Dreyecke und in vier Parallel-

trapeze. Diese zusammen ausgerechnet, und ihre Summe zu der vorhin (in I.) gefundenen addirt, giebt den Flächeninhalt des ganzen Feldes.

Der Beweis ergiebt sich aus der Lehre von der Berechnung des Inhaltes ebener Figuren.

§. 349.

Anmerkung. Der Lehrer wird die vorige Aufgabe an andern Zeichnungen dem Schüler erläutern, damit sein geometrischer Scharfsinn hierdurch mehrfach gebildet werde.

§. 350.

Anmerkung. Bisweilen kann auch der Inhalt einer Figur sogleich auf dem Felde, durch Hülfe der einfachen Meßgeräthschaften, gefunden werden, ohne daß man nöthig hat, dieselbe zuerst in den Grund zu legen. Dies ist häufig bey kleinern Grundstücken der Fall, welche durch schickliche Diagonallinien in lauter Dreyecke getheilt werden können. Sehr nützlich für die praktische Geometrie ist hier die Aufgabe: Aus den drey gemessenen Seiten eines Dreyecks unmittelbar seinen Inhalt zu berechnen, weil hierbey manche Fehler vermieden werden. Ihre Auflösung soll unten beygebracht und erwiesen werden.

§. 351.

Aufgabe. Eine auf dem Papiere gezeichnete Figur nach dem großen Maaßstabe auf dem Felde abzustecken.

Auflösung und Beweis ergeben sich leicht aus dem Bisherigen.

§. 352.

Aufgabe. Ein gegebenes Feld in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. I. Man berechne den Inhalt der ganzen Figur und dividire ihn durch die Zahl der zu findenden gleichen Theile, so findet man die Größe eines dieser Theile.

II. Man schneide von der Figur ein Stück ab, welches nach dem Augenmaaße dem zu findenden Theile ungefähr gleich ist, berechne seinen Inhalt und bestimme, wie viel es zu groß oder zu klein sey. Im ersten Falle muß das gehörige Stückchen abgeschnitten, im zweyten zugesetzt werden.

III. Dieses Stückchen kann als ein Dreyeck betrachtet werden, dessen Grundlinie die (in II. gezogene) Scheidelinie, dessen Höhe aber noch zu finden ist. Dividirt man daher mit der Grenzlinie in den Inhalt des Stückchens, so ist der Quotient die halbe Höhe des zu findenden Dreyecks, welches hierdurch leicht verzeichnet werden kann.

IV. Das weitere Verfahren, nebst Berechnung wirklicher Beyspiele, wird dem mündlichen Vortrage des Lehrers und der practischen Uebung der Schüler überlassen. Bey dem wirklichen Theilen eines solchen Grundstücks, z. B. einer gemeinheitlichen, gemeinschaftlich benützten Wiese in soviele gleiche Theile, als es Gemeindeglieder sind, muß der Geometer mancherley Real- und Personalverhältnisse berücksichtigen.

§. 353.

Anmerkung. Auch kann jedes Feld in verhältnißmäßige Theile eingetheilt werden, wozu die Anweisung nicht schwer zu finden ist. Wirkliche Beyspiele müssen auch dieses erläutern.

V. Etwas vom Höhenmessen.

§. 354.

Aufgabe. Die Höhe eines Gegenstandes aus einem Standpuncte zu messen, aus welchem man zu jenem Puncte kommen kann, der lothrecht unter jener Höhe liegt.

Es sey (Fig. 152.) BD die zu messende Höhe, wobey man annimmt, daß aus A nach D, welches lothrecht unter B liegt, gemessen werden kann.

Auflösung. I. Man stelle das Instrument so, daß die Fläche des Tischchens mn lothrecht stehe, was durch Hülfe eines Senkbleyes geschieht, und bestimme den Punct a, der senkrecht über A liegt.

II. Aus a visire man horizontal nach ac in C, und aus diesem Puncte nach ab in B.

III. Nun messe man AD, trage das Maaß aus a in c, errichte hier das Loth cb, welches die ab in b schneidet, so ist das Maaß von cb jenem von CB gleich.

IV. Setzt man zu der gefundenen BC noch CD = aA, so erhält man die Größe von BD.

Der Beweis folgt wieder aus der Aehnlichkeit.

§. 355.

Aufgabe. Die Höhe eines Gegenstandes aus zwey Standpuncten, deren Entfernung man bestimmen kann, zu messen.

Es sey (Fig. 153.) AB die zu messende Höhe, welche aus den Standorten C und D gefunden werden soll.

Auflösung. I. Man stelle den Meßtisch in verticaler Richtung so in C, daß c lothrecht darüber liegt, visire horizontal in F und A, und ziehe die ce und ca willkührlich.

II. Man setze den Tisch so in D, daß B, C und D in gerader Linie liegen, messe CD, trage sie aus c in d, und stelle das Tischchen dergestalt, daß die verlängerte dc in den Punct F eintrifft.

III. Aus d visire man in A und ziehe die da, bis sie die ca in a schneidet. Endlich ziehe man aus a das Loth af auf de, so ist dies die Höhe AF nach dem kleinen Maaßstabe, wozu noch die Höhe dD = cC = FB gesetzt wird, um die gesuchte Höhe AB zu bekommen.

Auch dieser Beweis ergiebt sich leicht aus den ähnlichen Dreyecken.

§. 356.

Anmerkung. Es ist klar, daß die zwey letzteren Aufgaben auch vermittelst des Winkelmessers aufgelößt werden können, wie der bis hieher geleitete Schüler leicht von selbst finden wird.

§. 357.

Anmerkung. Wie man eine gegebene Höhe

I. Durch Hülfe eines Stabes, in dessen oberer Spalte sich ein bewegliches Lineal befindet,

II. Durch Messung des Schattens,

III. Durch Hülfe eines Spiegels,

IV. Aus zwey übereinanderstehenden Fenstern eines hohen Gebäudes,

V. Durch verschiedene sogenannte Höhenmesser finden kann, wird der Lehrer in den Vorlesungen zeigen.

§. 358.

Anmerkung. Dahin gehört auch die Aufgabe: die senkrechte Höhe eines kleinen Berges durch einfache Meßinstrumente zu finden. Auch bringe der Lehrer dem Schüler den Begriff und Gebrauch der Wasserwage und des Nivellirens (Wasserwägens) bey.

Der

geometrischen Wissenschaftslehre vierter Cursus.

Elementar-Trigonometrie.

Elementar-Trigonometrie.

I. Vorbereitungslehren vom Ausziehen der Quadratwurzel.

§. 359.

Erklärung. I. Das Product einer Zahl in sich selbst wird ihr Quadrat, und jene Zahl die Wurzel des Quadrats oder Quadratwurzel genannt. So ist $6 \times 6 = 36$ das Quadrat von 6, und 6 die Quadratwurzel von 36. Zur Bezeichnung des Quadrats einer Zahl schreibt man eine kleine Ziffer 2 zur Rechten etwas in die Höhe. So ist $8^2 = 8 \times 8 = 64$. Der Name Quadrat ist aus der Geometrie in die Arithmetik übertragen worden, weil man (§. 237.) den Inhalt eines Quadrates findet, wenn das Maaß seiner Seite einmal mit sich selbst multiplizirt wird.

II. Aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel ziehen heißt eine Zahl finden, welche, einmal mit sich selbst multiplizirt, die gegebene hervorbringt. Das Zeichen dafür ist $\sqrt{}$. So heißt z. B. $\sqrt{49}$ so viel, als die Quadratwurzel aus 49, welche 7 ist, und es ist $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{144} = 12$ u. s. w.

III. Die Wurzel heißt eintheilig, wenn sie aus blosen Einern, zweytheilig, wenn sie aus Einern und Zehnern, dreytheilig, wenn sie aus Einern, Zehnern und Hunderten besteht u. s. f. Die höchste Ziffer der Wurzel heißt der erste Theil, die darauf folgende der zweite Theil u. s. f.

§. 360.

Zusatz. Die Quadrate aller eintheiligen Wurzeln befinden sich in dem Einmaleins und sind der Reihe nach: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, u. 81.

§. 361.

Lehrsatz. Das Quadrat jeder zweytheiligen Wurzel besteht aus drey Stücken:

I. Aus dem Quadrate des Zehners oder des ersten Theils;

II. Aus einem zweyfachen Producte des Zehners in den Einer, oder des ersten Theils in den zweyten, und

III. Aus dem Quadrate des Einers, oder des zweyten Theils.

Beweis. Es sey 48 die gegebene zweytheilige Wurzel, so ist der erste Theil 40, der zweite 8; folglich 48 × 48 = (40 + 8) × (40 + 8), welches folgende Rechnung giebt:

I Th. II Th.
40 + 8
40 + 8

40 × 40 = 1600 = dem Quadrate des I Theils.
40 × 8 = 320 = dem Prod. d. I Th. i. d. II Th.

$8 \times 40 = 320$ = dem Prod. des I Th. i. d. II Th.
$8 \times 8 = 64$ = dem Quadr. des II Theils.

folglich $2304 = 40^2 + 2 \times 40 \times 8 + 8^2$.

Die gewöhnliche Multiplicationsrechnung stimmt vollkommen damit überein, denn es giebt

48	multipliciret
mit 48	
384	
192	

das Produkt 2304, wie vorhin.

§. 362.

Anmerkung. Dieser wichtige Satz kann durch geometrische Zerlegung eines Quadrats sehr anschaulich gemacht werden, wie der Schüler unter Anleitung des Lehrers leicht selbst findet.

§. 363.

Zusatz. I. Das Quadrat des ersten Theils muß seine niedrigste Stelle in den Hunderten haben. Seine höchste kann in die Tausende reichen, da $90 \times 90 = 8100$.

II. Das doppelte Product muß seine niedrigste Stelle in den Zehnern haben. Seine höchste Stelle kann auch in die Tausende gehen, da $2 \times 90 \times 9 = 2 \times 810 = 1620$.

III. Das Quadrat des zweyten Theils muß seine niedrigste Stelle in den Einern, und kann seine höchste in den Zehnern haben, da schon $4 \times 4 = 16$ ist.

§. 364.

Zusatz. Jede Zahl, welche aus drey oder vier Ziffern besteht, muß eine zweytheilige Quadratwurzel haben. Denn jede eintheilige Wurzel ist viel zu klein; die kleinste dreytheilige aber, d. h. 100, schon zu groß, da 100 × 100 = 10000.

§. 365

Zusatz. Wenn man daher eine drey- oder vierzifferige Zahl von der Rechten zur Linken in zwey Classen theilt, und der ersten Classe zwey Ziffer giebt, so liegt in der linken Classe das Quadrat des ersten Wurzeltheils, und vielleicht noch etwas vom doppelten Producte. In der höchsten Ziffer der rechten Classe ist der Anfang des doppelten Products, und in der folgenden Ziffer dieser Classe der Anfang des Quadrats vom zweyten Theile enthalten.

§. 366.

Aufgabe. Aus jeder drey- oder vierzifferigen Zahl die Quadratwurzel zu finden.

Auflösung. I. Man theile die Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen, so daß die erste Classe zwey Ziffer enthält.

II. Man suche das größte Quadrat, welches von der linken Classe abgezogen werden kann, und subtrahire es wirklich davon. Die Wurzel dieses Quadrats ist der erste zu findende Wurzeltheil.

III. Der Rest in II. (wenn einer bleibt) ist Dasjenige, was das doppelte Product in die linke Classe gebracht hat. Nimmt man zu ihm die nächste Ziffer der gegebenen Zahl herunter, so enthalten beide Ziffer das doppelte Product aus dem ersten Theil in den zweyten.

IV. Dividirt man nun mit dem doppelten ersten Wurzeltheile in diese Zahl, so muß der Quotient der zweyte Theil der Wurzel seyn. Man bilde nun das doppelte Product und ziehe es ab.

V. Zu dem etwaigen Reste in IV. setze man die letzte Ziffer der Quadratzahl, so müssen diese zwey Ziffer das Quadrat des zweyten Theils enthalten. Bildet man daher dieses Quadrat, so ist es entweder jener Zahl gleich, oder größer oder kleiner. Im ersten Falle ist die gegebene Zahl ein vollkommenes Quadrat, und die gefundene Wurzel ihre genaue Wurzel.

VI. Im zweyten Falle von V. muß man den Quotienten in IV. um eins verringern, dann wieder nach IV. und V. verfahren, bis das Quadrat des neuen zweyten Theils von der Zahl in V. abgezogen werden kann.

Im dritten Falle von V. ist die gefundene Wurzel diejenige, deren Quadrat der gegebenen Zahl am nächsten kömmt, und der gebliebene Rest zeigt an, um wie viel diese Zahl größer als das Quadrat der gefundenen Wurzel ist. Wenn man daher diese Wurzel quadrirt, und den Rest dazu addirt, so muß die gegebene Zahl herauskommen.

Der Beweis davon beruht unmittelbar auf den vorhergehenden §§.

Wurzeltheile.

Beyspiele. I) $\sqrt{}$	5|76	I. II. / 2 4
Quadrat des I. Theils	4	
das doppelte Prod. steckt in	17	
der doppelte I. Wurzeltheil	(4)	
dopp. Product aus I. in II.	16	
	16	
Quadrat des II. Theils	16	
	00	

Folglich ist $\sqrt{576} = 24$. Die Probe wird gemacht, wenn man das Product 24×24 wirklich rechnet, welches $= 576$ ist.

Wurzeltheile.

II) $\sqrt{}$	14|44	I. II. / 3 8
Quadrat des I. Theils	9	
	54	
Der doppelte I. Theil	(6)	
Dopp. Prod. aus I. in II.	48	
	64	
Quadrat des II. Theils	64	
	00	

Obgleich hier der doppelte erste Wurzeltheil 6 in 54 gerade 9mal enthalten ist, so sieht man doch leicht, daß wegen des noch abzuziehenden Quadrats vom II. Theile nur 8 in den Quotienten kommen darf. — Die Probe ist, daß $38 \times 38 = 1444$.

```
              Wurzeltheile.
              { I. II.
III) √35|68   { 59
    25           59
   106          531
   (10)         295
    90         3481 = 59²
   168
    81           87 R. ad.
Rest 87)       3568 Probe.
```

```
              Wurzeltheile.
              { I. II.
IV) √85|96    { 92
    81           92
    49          184
   (18)         828
    36         8464 = 92²
   136          132 R. ad.
     4         8596 Probe.
Rest 132
```

Obgleich in dem Beyspiele IV. ein großer Rest bleibt, so berechtigt dies doch nicht, den II. Wurzeltheil auch nur um eine Einheit zu vergrößern. Denn $93 \times 93 = 8649 > 8596$.

§. 367.

Aufgabe. Die Theile zu finden, welche in den Quadraten mehrtheiliger Wurzeln enthalten sind.

Auflösung. I. Es sey 348 die gegebene dreytheilige Wurzel, so ist $348 = 300 + 40 + 8$. Man kann diese in eine zweytheilige verwandeln, wenn man $348 = (300 + 40) + 8$ setzt, und nun $(300 + 40)$ als den ersten, 8 als den zweyten Wurzeltheil ansieht. Allein $((300 + 40) + 8)^2 = (300 + 40)^2 + 2 \times (390 + 40) \times 8 + 8^2$. Ferner ist $(300 + 40)^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 40 + 40^2$. Daher wird $348^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 40 + 40^2 + 2 \times (300 + 40) \times 8 + 8^2$.

Dies mit Worten ausgedrückt, heißt: das Quadrat einer dreytheiligen Wurzel besteht 1) aus dem Quadrate des ersten Theils; 2) aus einem doppelten Producte des ersten Theils in den zweyten; 3) aus dem Quadrate des zweyten Theils; 4) aus einem doppelten Producte des ersten und zweyten Theils in den dritten und 5) aus dem Quadrate des dritten Theils.

II. Für eine mehrtheilige Wurzel, z. B. 4675 setze man $4675 = 4670 + 5$, wo jene Zahl den ersten, diese den zweyten Theil vorstellt. Daher ist $(4670 + 5)^2 = 4670^2 + 2 \times 4670 \times 5 + 5^2$, oder $= 4670^2 + 2 \times (4000 + 600 + 70) \times 5 + 5^2$. Wenn also die dreytheilige Wurzel zur viertheiligen wird, so kommen zu den Theilen, woraus das Quadrat der dreytheiligen besteht, noch zwey Stücke, um das Quadrat der viertheiligen zu bilden; nämlich ein doppeltes Product aus der Summe der drey vorhergehenden Wurzeltheile in den vierten, und dann ein Quadrat des vierten Theils.

III. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man folgendes allgemeine Gesetz:

A) Das Quadrat jeder mehrtheiligen Wurzel enthält, der Ordnung nach, die Quadrate aller Wurzeltheile.

B) Zwischen zwey unmittelbar auf einanderfolgenden Quadraten liegt immer ein doppeltes Product aus der Summe aller vorhergehenden Wurzeltheile in den neuen.

§. 368.

Anmerkung. Auch die Theile, woraus die Quadrate mehrtheiliger Wurzeln bestehen, lassen sich durch geometrische Construction darstellen, wie der Schüler nun wohl selbst finden wird.

§. 369.

Zusatz. Alle diese in dem Quadrate einer mehrtheiligen Wurzel enthaltene einzelne Stücke fangen mit ihren niedrigsten Ziffern in den unmittelbar aufeinander folgenden Decimal-Stellen an. Die Wahrheit dieses Satzes kann leicht an den Quadraten mehrtheiliger Wurzeln nachgewiesen werden.

§. 370.

Aufgabe. Wenn eine Zahl von mehr als vier Ziffern gegeben ist, zu bestimmen, wie vieltheilig ihre Quadratwurzel ist.

Auflösung. Wenn die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Classen getheilt wird, und jede Classe zwey Ziffer erhält, so hat ihre Wurzel so viele Theile, als es Classen giebt, wenn gleich die linke Classe nur eine Ziffer enthält.

Beweis. I. Wenn die gegebene Zahl fünf oder sechs Ziffern hat, so ist ihre Wurzel dreytheilig; denn sie kann weder zwey- noch viertheilig seyn, indem $99 \times 99 = 9801$ als Quadrat zu klein, und $1000 \times 1000 = 1000000$ als Quadrat zu groß ist.

II. Die Wurzel jeder sieben- oder achtzifferigen Zahl muß viertheilig seyn; denn $999 \times 999 =$

998001 ist als Quadrat zu klein, und 10000 × 10000 = 100000000 als Quadrat zu groß.

III. So kann dieser Beweis für alle höhere Zahlen fortgesetzt werden.

§. 371.

Aufgabe. Aus jeder gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu finden.

Auflösung. Diese ist der oben (§. 366) vorgetragenen ganz ähnlich und wird durch folgende Beyspiele erläutert:

		Wurzeltheile
		I. II. III.
Beyspiele. I) √	73|44|49	8 5 7
Quadrat des I. Theils	64	
	94	
Doppelter I. Theil	(16)	
Dopp. Prod. aus I. in II.	80	
	144	
Quadrat des II. Theils	25	
	1194	
Doppelter I. u. II. Theil	(170)	
D. Prod. aus I. u. II. III.	1190	
	49	
Quadrat des III. Theils	49	
	00	

Probe: 857 × 857 = 734449

		Wurzeltheile.
		I. II. III. IV.
II)	$\sqrt{78\|54\|73\|92}$	8 8 6 2
	64	. . . . . . Quadrat des I. Theils
	145	
	(16)	. . . . . . Doppelter I. Theil
	128	. . . . . . Dopp. Prod. aus I. in II.
	174	
	64	. . . . . . Quadrat des II. Theils
	1107	
	(176)	. . . . . Doppelter I. u. II. Theil
	1056	. . . . . Doppeltes Prod. aus I. u. II. in III.
	513	
	36	. . . . . Quadrat des III. Theils
	4779	
	(1772)	. . . Dopp. I. II. u. III. Theil
	3544	. . . Dopp. Prod. aus I u. II u. III. in IV.
	12352	
	4	. . . Quadrat des IV. Theils
Rest	12348	

Probe. Die wirkliche Rechnung lehrt, daß $(8862 \times 8862) + 12348 = 78547392$ ist.

Mehrere Beyspiele werden dem Anfänger in dieser Rechnung leicht die nöthige Fertigkeit erwerben.

§. 372.

Erklärung. Nicht jede gegebene Zahl hat eine genau anzugebende Quadratwurzel; denn wenn man zwischen zwey willkührlichen Quadratzahlen, z. B. zwischen den vollkommenen Quadraten 25

und 36 eine beliebige Zahl, z. B. 32 annimmt, so ist klar, daß $\sqrt{32}$ größer als 5, und kleiner als 6 sey. Wäre also $\sqrt{32}$ eine genau bestimmbare Zahl, so müßte sie ausser 5 noch Bruchtheile enthalten, und die Wurzel wäre eine aus einer ganzen Zahl und aus Bruchtheilen bestehende gemischte Zahl; welche, zum Quadrate erhoben, die gegebene hervorbringen müßte. Da aber das Quadrat dieser Bruchtheile immer wieder aus Bruchtheilen besteht, so kann nie die anze Zahl 32 daraus entstehen. Daher ist $\sqrt{32}$ nicht vollkommen genau in Bruchtheilen anzugeben. Solche nicht genaue angebbare Quadratwurzeln heissen Irrational-Zahlen, und die Methode, ihren Werth so genau als man will zu finden, wird die Ausziehung der Quadratwurzel durch Annäherung genennt.

§. 373.

Zusatz. Da $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{10000} = 100$; $\sqrt{1000000} = 1000$ u. s. f. ist, so folget, daß, wenn ein Quadrat 100 mal, 10000 mal, 1000000 mal u. s. w. größer gemacht wird, seine Wurzel hierdurch 10 mal, 100 mal, 1000 mal u. s. f. größer werde.

Hat man daher die Wurzeln solcher 100, 10000, 1000000 mal vergrößerten Quadratzahlen gefunden, so darf man dieselbe nur wieder 10, 100, 1000 mal kleiner machen, um die richtigen Quadratwurzeln jener ursprünglichen Zahlen zu erhalten.

Demnach ist z. B. $\sqrt{7} = \frac{\sqrt{700}}{10} =$

$$\frac{\sqrt{70000}}{100} = \frac{\sqrt{7000000}}{1000} = \frac{\sqrt{700000000}}{10000}$$

u. s. w. (Der Lehrer erkläre in diesen Ausdrücken die Bedeutung des Divisionsstriches, wenn er den Schülern noch nicht gehörig bekannt seyn sollte.)

§. 374.

Zusatz. Auf diese Betrachtung, und auf die allgemeinen Regeln für das Wurzelausziehen, gründet sich das Ausziehen der Quadratwurzeln durch Annäherung, was nun aus folgenden Beyspielen deutlicher wird, als durch viele Worte. — Die allgemeine Regel heißt: Man hänge an die gegebene Zahl so viele Paare von Nullen, als auf wie viele Decimalbruchstellen die Wurzel gefunden werden soll.

Wurzeltheile.

Beyspiele. 1) √ 8|00|00|00|00 (28284

```
             4
          -----
       4 | 4 0
           3 2
          -----
             80
             64
           -----
      56 | 160
           112
          -----
            480
              4
           -----
     564 | 4760
           4512
          ------
           2480
             64
          ------
    5656 | 24160
           22624
          -------
           15360
              16
          -------
           15344 Rest.
```

Daher ist $\sqrt{8} = \frac{28284}{10000} = 2{,}8284.$

Probe. Hier ist wieder

$(2{,}8284 \times 2{,}8284) + 15344 = 8.$

II. Auf ähnliche Weise findet man

$\sqrt{127} = \sqrt{\frac{1270000000000}{100000}} = \frac{1126942}{100000} =$ 11,26942, nebst dem Reste 1728636.

Probe. Man findet wieder

$(11{,}26942 \times 11{,}26942) + 1728636 = 127.$

Auch in diesen Näherungsrechnungen ist den Anfängern eine anhaltende Uebung zu empfehlen, damit ihnen die Theorie klar und die Praxis geläufig werde.

§. 374. a.

Anmerkung. Nach diesen Vorbereitungen ist es dem Lehrer leicht, die Ausziehung der Quadratwurzeln aus gemeinen Brüchen, und aus Decimalbrüchen mit dem Vorigen zu verbinden.

II. Geometrische Anwendungen vom Wurzelausziehen.

§. 375.

Aufgabe. In dem rechtwinkeligen Dreyecke aus zwey, in Maaßtheilen gegebenen Seiten die dritte Seite durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Nennt man die erste Cathete a, die zweyte b und die Hypotenuse c, so werden die möglichen drey Fälle auf folgende Weise aufgelößt:

I. $\sqrt{(a^2 + b^2)} = c$
II. $\sqrt{(c^2 - a^2)} = b$ und
III. $\sqrt{(c^2 - b^2)} = a$.

Beyspiele. Zu I. Für a = 3′, b = 4′, wird $c = \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5'$. — Wenn man daher aus den beyden Endpunkten einer gegebenen geraden Linie = 5′ mit zwey Halbmessern = 3′ und = 4′ über einerley Seite jener Linie zwey sich durchschneidende Kreisbogen beschreibt, und diesen Durchschnittspunct mit ihren beyden Endpuncten geradlinig verbindet, so bilden diese unter sich einen rechten Winkel. Auch kann diese, öfters sehr bequeme Construction über der einen Chathete mit der Hypotenuse und der andern Cathete ausgeführt werden.

Zu II. Für c = 12′ und a = 8′ wird
$b = \sqrt{(144 - 64)} = \sqrt{80} = 8', 9442719$ . .
Für c = 36′, a = 20′, findet man
$b = \sqrt{(1296 - 400)} = \sqrt{896} = 29', 9332591$.

Zu III. Desgleichen wird für c = 14′ 8″ und b = 10′ 5″ die Cathete
$a = \sqrt{(148 \times 148 - 105 \times 105)} = \sqrt{(21904 - 11025)} = \sqrt{10879} = 104, 3 = 10'$ 4″ 3‴ u. s. f.

§. 376.

Aufgabe. Figuren, deren Flächeninhalt gefunden werden kann, durch Rechnung in gleich große Quadrate zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe aus dem berechneten Inhalte dieser Figuren die Quadratwurzel, so ist diese das Maaß der Seite des zu findenden Quadrates. Man bemerke zur Erläuterung folgende Fälle:

I. Ein gegebenes Dreyeck in ein ihm gleiches Quadrat zu verwandeln.

Es sey des Dreyecks gemessene Höhe = h, seine Grundlinie = g, das Maaß der Seite des seinem Inhalte gleichen Quadrats = s, so ist $s = \sqrt{\frac{h \times g.}{2}}$ — Wäre z. B. $h = 24^\circ$ $g = 38^\circ$, so hätte man $s = \sqrt{\frac{24 \times 38}{2}} = \sqrt{456} = 21^\circ\ 3'\ 5''$. Um dieses Quadrat zu construiren, könnte man nun, durch Hülfe des verjüngten Maaaſtabes, diese $21^\circ\ 3'\ 5''$ in den Cirkel fassen und über diese Linie ein Quadrat beschreiben.

II. Ein Parallelogramm in ein ihm gleiches Quadrat zu verwandeln. Das Maaß der senkrechten Höhe dieses Parallelogramms sey h, und jenes seiner Grundlinie sey g, so ist hier $s = \sqrt{h \times g}$. Für $h = 15^\circ$ und $g = 84^\circ$ wird $s = \sqrt{15 \times 84} = \sqrt{1260} = 35^\circ\ 4'\ 9''$.

III. Einen Kreis, dessen Durchmesser in bekannten Maaßtheilen gegeben ist, in ein ihm gleiches Quadrat zu verwandeln.

Es sey der Durchmesser = d, die zu findende Fläche = F, so ist 1000 : 785 = d^2 : F (§. 269.) folglich $F = \frac{785 \times d^2}{1000}$, und daher die Seite des zu findenden Quadrates, oder $s = \sqrt{\frac{785 \times d^2}{1000}}$. — Wäre nun z. B. d = 10°, so hätte man

$$s = \sqrt{\frac{785 \times 100}{1000}} = \sqrt{\frac{785}{10}} = \sqrt{\frac{7850}{100}}$$

$$= \frac{\sqrt{7850}}{10} = \frac{891}{10} = 8^\circ\, 9'\, 1''$$

§. 377.

Aufgabe. Der Flächeninhalt eines Kreises in Quadratmaaß ist gegeben; man soll die Größe seines Durchmessers in Längemaaß finden.

Auflösung und Erläuterung. Es sey der gegebene Flächeninhalt des Kreises, odes F = $348^{\square°}$. Wie groß ist sein Durchmesser? — Da 1000 : 785 = D^2 : F, so hat man 1000 : 785 = D^2 : 348; folglich

$$D^2 = \frac{348 \times 1000}{785} = \frac{348000}{785} = 433{,}32 \text{ und}$$

$$D = \sqrt{443{,}32} = \sqrt{\frac{44332}{100}} =$$

$$\frac{\sqrt{44332}}{10} = \frac{210{,}5}{10} = 21{,}05 = 21^\circ\, 5''$$

Es ist dem Schüler zu rathen, mehrere solche Beyspiele durchzurechnen.

§. 378.

Aufgabe. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist in Zahlen gegeben. Man soll die Größe der Seite eines andern Quadrates finden, welches mit dem gegebenen in irgend einem bestimmten Verhältnisse steht.

Auflösung. Sie ergiebt sich am Deutlichsten aus folgenden einzelnen Beyspielen:

I. Das gegebene Quadrat betrage 64 Quadratruthen. Wie groß ist die Seite des fünfmal so großen Quadrates?

Hier wird $s = \sqrt{5 \times 64} = \sqrt{320} = 17^{\circ}\ 8'\ 8''$.

II. Das gegebene Quadrat sey 138°. Wie groß ist die Seite des achtmal so kleinen Quadrates?

Nun wird $s = \sqrt{\frac{238}{8}} = \sqrt{29,\ 75} = 5^{\circ}\,4'\,5''$.

III. Wie groß wird die Seite eines Quadrates, welches vom Quadrate 144° so viel als 5/7 ist?

Hier wird $s = \sqrt{144 \times 5/7} = \sqrt{\frac{144 \times 5}{7}}$
$= \sqrt{\frac{720}{7}} = \sqrt{102,\ 8571} = 10^{\circ}\ 1'\ 4''$.

§. 379.

Aufgabe. Aus dem in Zahlen gegebenen Halbmesser eines Kreises und einer Sehne in ihm den Abstand derselben von dem Mittelpuncte zu berechnen.

Auflösung. Wenn man des Kreises Halbmesser r, die Sehne in ihm s, und ihren zu findenden Abstand a nennt, so ist leicht zu sehen, daß

$$a = \sqrt{\left(r^2 - (\tfrac{1}{2} s)^2\right)} \text{ ist.}$$

Beyspiele. Für $r = 8^{\circ}$, $s = 6^{\circ}$ wird $a = \sqrt{(64 - 9)} = \sqrt{55} = 7^{\circ}\ 4'\ 1''\ 6'''$.

§. 380.

Zusatz. Auch wird hieraus noch Folgendes gefunden:

1) $\frac{1}{2} s = \sqrt{(r^2 - a^2)}$ und

2) $r = \sqrt{\left(a^2 + (\tfrac{1}{2} s)^2\right)}$, wozu sehr leicht Beyspiele berechnet werden können.

§. 381.

Aufgabe. Der Inhalt und eine Linie einer Figur sind in Zahlen gegeben. Man soll die homologe Seite einer ihr ähnlichen von gegebener Fläche berechnen.

Auflösung. Da sich ähnliche Figuren wie die Quadrate ihrer homologen Seiten verhalten, so findet man zuerst das Quadrat der gesuchten Seite und daraus, durch Wurzelausziehen, die Seite selbst.

Erläuterung und Beyspiele.

I. Der Inhalt eines Dreyecks ist $= 124^{□°}$ und eine Seite desselben $= 30^{\circ}$. Wie groß ist die homologe Seite (s) des ihm ähnlichen Dreyecks, welches $48^{□°}$ groß seyn soll?

Hier ist $124 : 48 = 30^2 : s^2$, folglich

$$s^2 = \frac{48 \times 30^2}{124} = \frac{43200}{124} = 348,38 \text{ und}$$

$$s = \sqrt{348,38} = 18,6 = 18^{\circ}\, 6'.$$

II. Ein in den Grund gelegtes und ausgerechnetes Zehneck hält nach dem großen Maaßstabe $865^{q\circ}$, und eine gemessene Seite desselben ist = 10°. Wie groß muß die ihr homologe Seite (s) in einem ähnlichen Zehnecke seyn, welches von jenem nur der zehnte Theil ist?

Hier wird $865 : 86,5 = 10^2 : s^2$;

$$\text{daher ist } s^2 = \frac{86,5 \times 100}{865} = \frac{8650}{865}$$

$$= 10, \text{ und } s = \sqrt{10} = 3^{\circ}\, 1'\, 6''.$$

Noch mehrere Anwendungen dieser Lehren sind sehr leicht beizubringen.

III. Vordersätze zur rechnenden Dreyeckslehre.

§. 382.

Erklärung. I. Aus dem ersten Cursus ist bekannt, daß zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel; oder eine Seite und die zwey daranliegenden Winkel; oder die drey Seiten die Größe und Gestalt eines Dreyecks bestimmen. Da aber jedes Dreyeck drey Seiten und drey Winkel enthält, so kann man im ersten Falle die Größe der dritten Seite und der zwey daranliegenden Winkel; im zweyten Falle die Größe der zwey

andern Seiten nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel; und im dritten Falle die Größe jedes der drey Winkel nur durch wirkliche Construction des Dreyecks und durch das unmittelbare Messen der eben genannten Stücke bestimmen.

II. Da sowohl das wirkliche Zeichnen des Dreyecks, als auch das Messen seiner Seiten und Winkel immer mit kleinern oder größern Fehlern verknüpft ist, so haben die Geometer eine Methode erdacht, dieses schwankende Messen in ein scharfes Rechnen zu verwandeln.

III. Hieraus entstand die rechnende Dreyeckslehre, d. h. eine Methode, aus den zur Bestimmung eines Dreyecks nöthigen, in Zahlen gegebenen Stücken, die übrigen durch Rechnung zu finden.

§. 383.

Anmerkung. Gewöhnlich wird diese Lehre die Trigonometrie genennt, und auf den Begriff und die Eigenschaften der sogenannten trigonometrischen Functionslinien gebaut. Hier sollen ihre Hauptlehren, als Fortsetzung der Geometrie, aus Berechnung der Sehnen und ihrer Anwendung zum Maaße der Winkel, auf leichtverständliche Weise, vorgetragen werden.

§. 384.

Erklärung. Wenn man in der Oeffnung eines gegebenen Winkels einen beliebigen Punct nimmt, diesen mit seinem Scheitel durch eine gerade

Linie verbindet, damit aus jenem Puncte einen Kreis beschreibet, der des Winkels Schenkel in zwey Puncten schneidet, und diese Durchschnittspuncte durch eine gerade Linie verbindet, so heißt diese die dem gegebenen Winkel zugehörige Sehne.

Wenn ABD (Fig. 154.) der gegebene Winkel ist, und aus C mit CB ein Kreis beschrieben wird, welcher die Schenkel BA und BD in E und F schneidet, und nun noch EF gezogen wird, so ist diese EF die zum Winkel ABD gehörige Sehne.

§. 385.

Zusatz. Da um jedes Dreyeck ein Kreis beschrieben werden kann, so ist jede Seite dieses Dreyecks die ihrem gegenüberliegenden Winkel zugehörige Sehne.

So ist (Fig. 154.) EB die zum Winkel EFB, und BF die zum Winkel BEF gehörige Sehne.

§. 386.

Zusatz. I. Die dem rechten Winkel zugehörige Sehne ist der Durchmesser eines Kreises, der durch seinen Scheitel und seine beyde Schenkel construirt werden kann.

So gehört (Fig. 155.) der Durchmesser AB als Sehne zum rechten Winkel ADB.

II. Eine Sehne, die kleiner als der Durchmesser ist, gehört sowohl einem stumpfen als einem spitzen Winkel zu; so, daß ein stumpfer und ein

spitzer Winkel, die zusammen zwey Rechte betragen, einerley Sehne haben.

Die Sehne EG gehört sowohl dem stumpfen Winkel EFG, als auch dem spitzen Winkel EHG an, und man sieht leicht, daß jener so viel größer ist, als ein Rechter, um so viel dieser weniger, als der Rechte beträgt.

§. 387.

Zusatz. Da auf diese Weise die Sehnen mit den ihnen zugehörigen Winkeln wachsen und abnehmen, oder abnehmen und wachsen, so bieten dieselbe ein schikliches Maaß für die ihnen angehörigen Winkel dar. Der Durchmesser, als die Sehne des rechten Winkels und als die größte gerade Linie im Kreise, ist ihre bequemste Einheit und es kömmt nur darauf an, für alle stumpfe und spitze Winkel, welche zusammen 180° betragen, die ihnen zukommenden kleinern Sehnen zu berechnen. Denn jeder bestimmte Theil des Durchmessers gehört als Sehne zwey bestimmten Winkeln zu, deren Summe = 180°. Dies giebt eine neue Methode, das Maaß der Winkel nicht durch Grade (krumme Linien), sondern durch gerade Linien zu bestimmen. Aber wie können diese Sehnen berechnet werden?

§. 388.

Aufgabe. Die Möglichkeit zu zeigen, wie für einen gegebenen Durchmesser die den ver-

schiedenen Winkeln zugehörigen Sehnen durch Rechnung gefunden werden können.

Auflösung. I. Es sey CAB (Fig. 156.) ein gleichseitiges Dreyeck, so ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß AB die Seite des regulären Sechsecks in einem Kreise ist, der aus C mit CA = CB beschrieben wird. Wird nun aus C auf AB das Loth CF construirt und, bis es den Bogen ADB in D schneidet, verlängert, auch BD gezogen so ist diese die Seite des regulären Zwölfecks im Kreise.

II. Da nun das Dreyeck CFB rechtwinkelig und FB = $\frac{1}{2}$ CB ist, so kann man, wenn CB in Zahlen gegeben wird, die CF berechnen. Denn wenn man CB zum Quadrate erhebt, von diesem das Quadrat von FB hinwegnimmt, so bleibt das Quadrat von CF übrig. Hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt die Größe von CF in Zahlen.

III. Zieht man CF von CD = CB ab, so bleibt FD übrig. Da man nun in dem rechtwinkeligen Dreyecke DFB die zwey Catheten DF und FB kennt, so erhebe man jede zum Quadrate, und ziehe aus ihrer Summe die Quadratwurzel, so findet man die Größe von BD in Zahlen.

IV. Auf gleiche Weise kann durch das Loth CG, durch seine Verlängerung in E und durch die beyden Dreyecke CGB und EGB die Seite BE des regulären Vierundzwanzigecks berechnet werden, und es ist klar, wie diese Rechnung weiter fortgesetzt werden kann, um die Seiten der folgenden Doppelecke zu bestimmen.

§. 389.

Zusatz. Setzt man die Seite des Sechsecks, und folglich auch den Halbmesser = 1, so findet man nach Anleitung der vorigen Rechnungen (welche sehr nützlich von dem Schüler selbst durchgeführt werden) folgende Resultate:

Die Seite des Zwölfecks . . .	= 0, 517638 . . .
— Vierundzwanzigecks	= 0, 261052 . . .
— Achtundvierzigecks .	= 0, 130806 . . .
— Sechsundneunzigecks	= 0, 065438 . . .
— Hundertzweyund neunzigecks	= 0, 039723 . . .
— Dreyhundertvier undachtzigecks . . .	= 0, 016362 . . .
— Siebenhundertachtund sechzigecks	= 0, 008181 . . .
— Eintaus.fünfhundert sechsunddreyßigecks .	= 0, 004096 . . .
— Dreytausendzweyund siebenzigecks	= 0, 002045 . . .

§. 389. *a.*

Zusatz. Nimmt man den Durchmesser des Kreises = 1, so wird der Halbmesser = $\frac{1}{2}$, und jede der im vorigen §. angeführten Vielecksseiten um ihre Hälfte vermindert. Sie lassen sich daher für diese Annahme leicht berechnen.

§. 389. *b.*

Zusatz. Da der 12 Ecksseite ein Mittelpuncts-winkel von 30°, folglich ein Peripheriewinkel von

15° zugehört, so entsteht hieraus folgende Uebersicht:

Die	12	Ecksseite	gehört	z. B. von	15°
„	24	„	„	„	7°30′
„	48	„	„	„	3°45′
„	96	„	„	„	1°52′30″
„	192	„	„	„	0°56′15
„	384	„	„	„	0°28′7″30‴
„	768	„	„	„	0°14′3″45‴
„	1536	„	„	„	0°7′1″52‴30IV
„	3072	„	„	„	0°3′30″56‴15IV

§. 390.

Zusatz. Durch Hülfe ähnlicher Rechnungen kann man für jeden Winkel am Mittelpuncte die ihm zugehörige Sehne finden, wenn der Halbmesser in Zahlen gegeben ist. Da nun jede Sehne zu einem halb so großen Peripheriewinkel gehört, so ist ersichtlich, wie man auch hierdurch die allen Peripheriewinkeln zugehörigen Sehnen berechnen kann. Die wirkliche Ausführung dieser Rechnung muß aber hier übergangen werden.

§. 391.

Anmerkung. I. Die vorige Aufgabe erläutert auch die Methode, wie man bey gegebenem Halbmesser den Umfang des damit beschriebenen Kreises berechnen könne. Denn wenn man den Kreis nur als ein regelmäßiges Sechsundneunzigeck berechnen will, so ist für den Halbmesser = 1 die Seite dieses Sechsundneunzigecks = 0,065438 (§. 389.) und dessen Umfang = 0,065438 × 96 = 0,6282048, wovon die Hälfte = 3,141024 den Umfang des Kreises für den Durchmesser = 1 schon mit

ziemlicher Genauigkeit giebt. Betrachtet man den Kreis als ein Dreytausendzweyundsiebenzigeck, so wird für den Durchmesser = 1 die Peripherie = 3,141120. Dies erläutern die oben (II. Cursus) angeführten Sätze vom Kreise.

II. Ein berühmter Mathematiker, Ludolph von Kölln (van Ceulen), welcher im Jahre 1610 zu Leiden gestorben ist, hat das Verhältniß vom Durchmesser zum Umkreise auf 34 Decimalstellen berechnet, und, durch ungemein mühsame Rechnungen, gefunden, daß zum Durchmesser = 1 eine Peripherie = 3,141592 653589 793238 462643 383279 5028 gehöre.

§. 391. *a.*

Anmerkung. Zur fernern Erläuterung dient folgende Tabelle, woraus man sieht, daß die Fläche des äussern und innern regelmäßigen 32768 Ecks in den ersten 7 Decimalstellen übereinstimmt. Der Halbmesser ist = 1.

Seitenzahl der Vielecke.	Fläche der innern Vielecke.	Fläche der äussern Vielecke.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

Da man nun die halbe Umfangslinie eines regelmäßigen Vielecks findet, wenn man mit dessen Halbmesser in seinen Flächeninhalt dividirt, so ist 3,1415926 . . . der halbe Umfang des 32768 Ecks für den Halbmesser = 1. Daher wird denn für den Durchmesser = 1 der ganze Umfang dieses regelmäßigen Vielecks d. h. des Kreises, bis auf die siebente Decimalbruchstelle, auch wieder = 3,1415926 . . . wie vorhin (in §. 391.)

§. 392.

Erklärung. Auf diese Weise erkennt man, wie es möglich war, eine Sehnentafel zu berechnen, d. h. eine Sammlung von Winkeln und den dazu gehörigen Sehnen für einen bestimmten Durchmesser. Bey der hier folgenden Tafel wurde der Durchmesser in 100000 gleiche Theilchen getheilt angenommen, und die Sehnen aller Winkel von Viertels- zu Viertelsgraden nach diesen Theilchen berechnet. Den nähern Gebrauch dieser Tafel werden nun gleich mehrere Beyspiele lehren.

§. 393.

Sehnen-Tafel

für

jeden Viertelsgrad von 15′ bis zu 90°.

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
15′	436	15′	9150	15′	17794
30′	873	30′	9585	30′	18223
45′	1309	45′	10019	45′	18652
1°—	1745	6°—	10453	11°—	19081
15′	2181	15′	10887	15′	19509
30′	2618	30′	11320	30′	19937
45′	3054	45′	11754	45′	20364
2°—	3490	7°—	12187	12°—	20791
15′	3926	15′	12620	15′	21218
30′	4362	30′	13053	30′	21644
45′	4798	45′	13485	45′	22070
3°—	5234	8°—	13917	13°—	22495
15′	5669	15′	14349	15′	22920
30′	6105	30′	14781	30′	23344
45′	6540	45′	15212	45′	23769
4°—	6976	9°—	15643	14°—	24192
15′	7411	15′	16074	15′	24615
30′	7846	30′	16505	30′	25038
45′	8281	45′	16935	45′	25460
5°—	8716	10°—	17365	15°—	25882

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
15′	26303	15′	37865	15′	48862
30′	26724	30′	38268	30′	49242
45′	27144	45′	38671	45′	49622
16°—	27564	23°—	39073	30°—	50000
15′	27983	15′	39474	15′	50377
30′	28401	30′	39875	30′	50754
45′	28820	45′	40275	45′	51129
17°—	29237	24°—	40674	31°—	51504
15′	29654	15′	41072	15′	51877
30′	30071	30′	41469	30′	52250
45′	30486	45′	41866	45′	52621
18°—	30902	25°—	42262	32°—	52992
15′	31316	15′	42657	15′	53361
30′	31730	30′	43051	30′	53730
45′	32144	45′	43444	45′	54097
19°—	32557	26°—	43837	33°—	54464
15′	32969	15′	44229	15′	54829
30′	33381	30′	44620	30′	55194
45′	33792	45′	45010	45′	55557
20°—	34202	27°—	45399	34°—	55919
15′	34612	15′	45787	15′	56280
30′	35021	30′	46175	30′	56641
45′	35429	45′	46561	45′	57000
21°—	35837	28°—	46947	35°—	57358
15′	36244	15′	47332	15′	57715
30′	36650	30′	47716	30′	58070
45′	37056	45′	48099	45′	58425
22°—	37461	29°—	48481	36°—	58779

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
15′	59131	15′	68518	15′	76884
30′	59482	30′	68835	30′	77162
45′	59832	45′	69151	45′	77439
37°—	60181	44°—	69466	51°—	77715
15′	60529	15′	69779	15′	77988
30′	60876	30′	70091	30′	78261
45′	61222	45′	70401	45′	78532
38°—	61566	45°—	70711	52°—	78801
15′	61909	15′	71019	15′	79069
30′	62251	30′	71325	30′	79335
45′	62592	45′	71630	45′	79600
39°—	62932	46°—	71934	53°—	79864
15′	63271	15′	72236	15′	80125
30′	63608	30′	72537	30′	80386
45′	63944	45′	72837	45′	80644
40°—	64279	47°—	73135	54°—	80902
15′	64612	15′	73432	15	81157
30′	64945	30′	73728	30′	81412
45′	65276	45′	74022	45′	81664
41°—	65606	48°—	74314	55°—	81915
15′	65935	15′	74606	15′	82165
30′	66262	30′	74896	30′	82413
45′	66588	45′	75184	45	82659
42°—	66913	49°—	75471	56°—	82904
15′	67237	15′	75756	15′	83147
30′	67559	30′	76041	30′	83389
45′	67880	45′	76323	45′	83629
43°—	68200	50°—	76604	57°—	83867

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
15′	84104	15′	90070	15′	94693
30′	84339	30′	90259	30′	94832
45′	84573	45′	90446	45′	94970
58°—	84805	65° —	90631	72°—	95106
15′	85035	15′	90814	15′	95240
30′	85264	30′	90996	30′	95372
45′	85491	45′	91176	45′	95502
59°—	85717	66°—	91355	73°—	95630
15′	85941	15′	91531	15′	95757
30′	86163	30′	91706	30′	95882
45′	86384	45′	91879	45′	96005
60°—	86603	67°—	92050	74°—	96126
15′	86820	15′	92220	15′	96246
30′	87036	30′	92388	30′	96363
45′	87250	45′	92554	45′	96479
61°—	87462	68°—	92718	75°—	96593
15′	87673	15′	92881	15′	96705
30′	87882	30′	93042	30′	96815
45′	88089	45	93201	45′	96923
62°—	88295	69°	93358	76°—	97030
15′	88499	15′	93514	15′	97134
30′	88701	30′	93667	30′	97237
45′	88902	45′	93819	45′	97338
63°—	89101	70°—	93969	77°—	97437
15′	89298	15′	94118	15′	97534
30′	89493	30	94264	30′	97630
45′	89687	45′	94409	45	97723
64°—	89879	71°—	94552	78°—	97815

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
15′	97905	15′	99087	15′	99786
30′	97992	30′	99144	30′	99813
45′	98079	45′	99200	45′	99839
79° —	98163	83° —	99255	87° —	99863
15′	98245	15′	99307	15′	99885
30′	98325	30′	99357	30′	99905
45′	98404	45′	99406	45′	99923
80° —	98481	84° —	99452	88° —	99939
15′	98556	15′	99497	15′	99953
30′	98629	30′	99540	30′	99966
45′	98700	45′	99580	45′	99976
81° —	98769	85° —	99619	89° —	99985
15′	98836	15′	99657	15′	99991
30′	98902	30′	99692	30′	99996
45′	98965	45′	99725	45′	99999
82° —	99027	86° —	99756	90° —	100000

IV. Berechnung der fehlenden Stücke des Dreyecks.

§. 394.

Lehrsatz. Die in Kreisen von verschiedenen Durchmessern zu gleichen Winkeln gehörigen Sehnen sind im geraden Verhältnisse dieser Durchmesser.

Es sey (Fig. 154.) W. ABD = W. IKL. (Fig. 157.) in der Fläche eines jeden ein willkührlicher Punct C und O genommen, aus diesem mit CB und OK ein Kreis beschrieben und die Sehne EF und MN gezogen, so ist EF : MN = BG : KP.

Beweis. Wenn man CE, CF und OM, ON zieht, so ist das Dreyeck ECF dem Dreyecke MON ähnlich, weil W. ECF = W. MON. Daher EF : MN = EC : MO, und folglich = BG : KP.

§. 395.

Lehrsatz. In jedem Dreyecke verhalten sich die Seiten, wie die Sehnen der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Wenn EBF (Fig. 154.) ein gegebenes Dreyeck ist, so verhält sich BE : EF : FB = Sehne W. EFB : Sehne W. FBE : Sehne W. BEF.

Beweis. Wenn man um das gegebene Dreyeck einen Kreis beschreibt, so ist klar, daß jede Dreyecksseite die Sehne des ihr gegenüberliegenden Winkels ist.

§. 396.

Anmerkung. Voriger Lehrsatz mußte bewiesen werden, um sich zu überzeugen, daß gleiche Winkel, auch bey Kreisen von verschiedenen Durchmessern, durch Sehnen bestimmt werden, welche mit diesen Durchmessern in einem unveränderlichen Verhältnisse stehen.

§. 397.

Lehrsatz. Wenn aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreyecks die fehlenden durch Rechnung gefunden werden sollen, so muß unter jenen wenigstens eine Seite seyn.

Beweis. Denn die Winkel bestimmen nur die Gestalt, nicht die Größe des Dreyecks.

§. 398.

Anmerkung. Auf diese Vordersätze soll nun die wirkliche Berechnung der fehlenden Stücke in gegebenen Dreyecken folgen. Zuerst betrachten wir die rechtwinkeligen dann die gleichschenkeligen, endlich die Dreyecke überhaupt.

§. 399.

Anmerkung. Der erste Erfinder der Sehnen-Tafeln und ihres Gebrauches in der rechnenden Dreyeckslehre soll Hypparch gewesen seyn, der im zweyten Jahrhunderte vor Christi Geburt gelebt hat.

A) Von rechtwinkeligen Dreyecken.

§. 400.

Aufgabe. Die möglichen Fälle zu bestimmen, welche bey der Berechnung der fehlenden Stücke im rechtwinkeligen Dreyecke Statt finden können.

Auflösung. Da in dem rechtwinkeligen Dreyecke der rechte Winkel immer gegeben ist, so findet man für das Dreyeck ABC (Fig. 158.) folgende vier Fälle:

I. Fall.

Gegeben: AC und W. A, oder AC und W. C.
Gesucht: W. C, AB und BC, oder W. A, AB und BC.

II. Fall.

Gegeben: AB und W. A oder W. C, oder BC und W. C oder W. A.
Gesucht: BC, AC und W. C oder W. A, oder AB, AC und W. A oder W. C.

III. Fall.

Gegeben: AC und AB, oder AC und BC.
Gesucht: W. C, W. A und BC, oder W. A, W. C und AB.

IV. Fall.

Gegeben: AB und BC.
Gesucht: AC, W. A und W. B.

Diese vier Fälle sollen nun einzeln durchgeführt und zur größern Uebung der Anfänger mit Zahlen-

beyspielen erläutert werden, wobey es sich von selbst versteht, daß man alle Linien hier arithmetisch, d. h. nach ihrem Zahlenwerthe betrachtet.

§. 401.

I. Aufgabe. Aus der Hypotenuse und einem daranliegenden spitzen Winkel den andern spitzen Winkel und die beyden Catheten zu finden.

Auflösung I. Wenn AC und W. A gegeben wird, so ist:

1. W. C = 90° — W. A.

2. Sehne W. B : Sehne W. A = AC : BC, folglich

$$BC = \frac{\text{Sehne W. A} \times AC}{\text{Sehne W. B}},$$

3. Sehne W. A : Sehne W. C = BC : AB, folglich

$$AB = \frac{\text{Sehne W. C} \times BC}{\text{Sehne W. A}},$$

4. Auch hätte man AB durch folgende Proportion: Sehne W. B : Sehne W. C = AC : AB finden können, wodurch $AB = \frac{\text{Sehne W. C} \times AC}{\text{Sehne W. B.}}$ wird.

5. Ferner hätte die Größe von AB durch den Ausdruck: $AB = \sqrt{(AC^2 - BC^2)}$ gefunden werden können.

II. Wäre aber AC und W. C gegeben, so ist:

1. W. A = 90° — W. C,

2. Sehne W. B : Sehne W. C = AC : AB

folglich $AB = \frac{\text{Sehne W. C} \times AC}{\text{Sehne W. B}}$,

3. Sehne W. C : Sehne W. A = AB : BC,

folglich $BC = \frac{\text{Sehne W. A} \times AB}{\text{Sehne W. C}}$.

4. Diese BC kann auch hier (so wie in I.) noch auf doppelte Weise gefunden werden.

Beyspiele. Zu I. Es sey AC = 148', und W. A = 30° 15', so ist

1. W. C = 90° — 30° 15' = 59° 45'.

2. Sehne W. 90° : Sehne W. 30° 15' = 148' : BC; folglich $BC = \frac{\text{Sehne W. } 30^\circ\, 15' \times 148'}{\text{Sehne W. } 90^\circ} = \frac{50377 \times 148}{100000} = \frac{7455796}{100000} = 74'\, 5''\, 5'''$

3. Sehne W. 30° 15' : Sehne W. 59° 45' = 74' 5'' : AB; folglich $AB = \frac{\text{Sehne W. } 59^\circ\, 45'' \times 74'\, 5''}{\text{Sehne W. } 30^\circ\, 15'} = \frac{86384 \times 7\,4\,5'}{50377} = \frac{64356080}{50377} = 127'\, 7''$.

Zu II. Es sey AC = 612' und W. C = 46° 30', so ist

1. W. A = 90° — 46° 30' = 43° 30'.

2. Sehne W. 90° : Sehne W. 46° 30' = 612' : AB, folglich $AB = \frac{\text{Sehne W. } 46^\circ\, 30' \times 612'}{\text{Sehne W. } 90^\circ.} = \frac{72537 \times 612}{100000} = \frac{44392644}{100000} = 443'\, 9''$.

3. Sehne W. 46° 30' : Sehne W. 43° 30' = 443' 9'' : BC, folglich BC =
$\frac{\text{Sehne W. } 43^\circ\, 30' \times 443'\, 9''}{\text{Sehne W. } 46^\circ\, 30'} = \frac{68835 \times 4439''}{72537}$
$= \frac{305558565}{72537} = 421'\, 2''$.

4. Die übrigen Berechnungsweisen von AB in I. und von BC in II. werden der Privatübung der Schüler empfohlen.

§. 402.

II. Aufgabe. Aus einer Cathete und einem gegebenen spitzen Winkel den andern spitzen Winkel, die andere Cathete und die Hypotenuse zu finden.

Auflösung. I. Wenn AB und W. A oder W. C gegeben wird, so ist

1. W. C = 90° — W. A, oder W. A = 90° — W. C,

2. Sehne W. C : Sehne W. A = AB : BC,

folglich $BC = \frac{\text{Sehne W. A} \times AB}{\text{Sehne W. C}}$,

3. Sehne W. C : Sehne W. B = AB : AC,

folglich $AC = \frac{\text{Sehne W. B} \times AB}{\text{Sehne W. C}}$.

II. Wird aber BC und W. C oder W. A gegeben, so ist

1. W. A = 90° — W. C, oder W. C = 90° — W. A,

2. Sehne W. A : Sehne W. C = BC : AB,

folglich $AB = \frac{\text{Sehne W. C} \times BC}{\text{Sehne W. A}}$,

3. Sehne W. A : Sehne W. B = BC : AC

folglich $AC = \frac{\text{Sehne W. B} \times BC}{\text{Sehne W. A}}$.

Beyspiele. Zu I. Es sey AB = 86′ und W. A = 38° 45, so ist

1. W. C = 90° — 38° 45′ = 51° 15′,

2. Sehne W. 51° 15′ : Sehne W. 38° 45′ = 86′ : BC, folglich $BC = \frac{\text{Sehne W. } 38^\circ\ 45' \times 86'}{\text{Sehne W. } 51^\circ\ 15'}$ $= \frac{86' \times 62592}{799\ 88} = \frac{5382912}{799\ 88} = 69'\ 0''\ 0'''$,

3. Sehne W. 51° 15′ : Sehne W. 90° = 86′ : AC, folglich $AC = \frac{\text{Sehne W. } 90^\circ \times 86'}{\text{Sehne W. } 51^\circ\ 15'} = \frac{100000 \times 86}{779\ 88} = \frac{8600000}{779\ 88} = 11'\ 0''\ 2'''$.

Zu II. Es sey BC = 344′ und W. C = 30° 15′, so ist

1. W. A = 90° — 30° 15′ = 59° 45′,

2. Sehne W. 59° 45′ : Sehne W. 30° 15′ = 344′ : AB, folglich $AB = \frac{\text{Sehne W. } 30^\circ\ 15' \times 344'}{\text{Sehne W. } 59^\circ\ 45'}$ $= \frac{50377 \times 344'}{86384} = \frac{17329688}{86384} = 20'\ 0''\ 6'''$,

3. Sehne W. 59° 45′ : Sehne W. 90° = 344′ : AC, folglich $AC = \frac{\text{Sehne W. } 90^\circ \times 344'}{\text{Sehne W. } 59^\circ\ 45'} = \frac{100000 \times 344'}{86384} = \frac{34400000}{86384} = 398'\ 2''$.

§. 403.

III. Aufgabe. Aus der gegebenen Hypotenuse und einer Cathete die spitzen Winkel und die andere Cathete zu finden.

Auflösung. I. Es sey AC und AB gegeben, so ist

1. AC : AB = Sehne W. 90° : Sehne W. C,

folglich $\text{Sehne W. C} = \frac{\text{AB} \times \text{Sehne W. } 90°}{\text{AC}}$,

2. W. A = 90° — W. C.

3. Sehne W. B : Sehne W. A = AC : BC,

folglich $\text{BC} = \frac{\text{Sehne W. A} \times \text{AC}}{\text{Sehne W. B}}$.

II. Wenn aber AC und CB gegeben sind, so ist

1. AC : CB = Sehne W. 90° : Sehne W. A,

folglich $\text{Sehne W. A} = \frac{\text{CB} \times \text{Sehne W. } 90°}{\text{AC}}$,

2. W. C = 90° — W. A,

3. Sehne W. B : Sehne W. C = AC : AB,

folglich $\text{AB} = \frac{\text{Sehne W. C} \times \text{AC}}{\text{Sehne W. B}}$.

Beyspiele. Zu I. Es sey AC = 64′ und AB = 40′, so ist

1. 64′ : 40′ = Sehne W. 90° : Sehne W. C,

folglich $\text{Sehne W. C} = \frac{40' \times \text{Sehne W. } 90°}{64'} =$

$= \frac{40' \times 100000}{64'} = \frac{4000000}{64} = 62500.$

Da nun diese Sehne zunächst zu dem Winkel von 38° 45′ gehört, so ist W. C = 38° 45′,

2. W. A = 90° — W. C = 90° — 38° 45′ = 51° 15′,

3. Sehne W. 90° : Sehne W. 51° 15′ = 64′ : BC, folglich $\text{CB} = \frac{\text{Sehne W. } 51° 15' \times 64'}{\text{Sehne W. } 90°} =$

$$\frac{77988 \times 64'}{100000} = \frac{4991232}{100000} = 49^\circ\ 9'\ 1''.$$

Zu II. Es sey AC = 322′ und CB = 264′, so ist

1. 322′ : 264′ = Sehne W. 90° : Sehne W. A,

$$\text{folglich Sehne W. A} = \frac{264' \times \text{Sehne W. } 90^\circ}{322'} =$$

$$\frac{264' \times 100000}{322} = \frac{26400000}{322} = 81987,$$

wozu ein Winkel von 55° gehört,

2. W. C = 90° — W. A = 90° — 55° = 35°,

3. Sehne W. 90° : Sehne W. 35° = 322′ : AB,

$$\text{folglich AB} = \frac{\text{Sehne W. } 35^\circ \times 322}{\text{Sehne W. } 90^\circ} =$$

$$\frac{57358 \times 322}{100000} = \frac{14869276}{100000} = 184'\ 6''\ 9'''.$$

§. 404.

IV. **Aufgabe.** Aus den beyden Catheten die Hypotenuse und die spitzen Winkel zu finden.

Auflösung. Wenn AB und BC gegeben sind, so findet man

1. AC dadurch, daß man das Maaß von AB und das Maaß von BC zum Quadrate erhebt, diese Quadrate addirt und aus ihrer Summe die Quadratwurzel zieht,

2. AC : BC = Sehne W. B : Sehne W. A,

$$\text{folglich Sehne W. A} = \frac{\text{BC} \times \text{Sehne W. B}}{\text{AC}},$$

3. W. C = 90° — W. A.

Beyspiel. Es sey AB = 24′ und BC = 16′, so ist

1. $AC = \sqrt{(24^2 + 16^2)} = \sqrt{(576 + 256)} = \sqrt{832} = 28' 8''$,

2. 28′ 8″ : 16′ = Sehne W. 90° : Sehne W. A,

folglich Sehne W. A $= \frac{160'' \times 100000}{288''} = \frac{16000000}{288} = 55555$, welche einem Winkel von 33° 45′ zugehört,

3. W. C = 90° — 33° 45′ = 56° 15′.

§. 405.

Anmerkung. Da man aus irgend zwey gegebenen Seiten im rechtwinkeligen Dreyecke die dritte Seite, vermöge des pythagorischen Lehrsatzes, durch Rechnung finden kann, so können in den vorhergehenden Aufgaben einige dieser Linien auch auf solche Weise berechnet werden. Es ist Anfängern zu rathen, beyde Rechnungen zu führen, wodurch zugleich eine der andern zur Probe dient.

B) Von gleichschenkeligen Dreyecken.

§. 406.

Aufgabe. Die Fälle zu bestimmen, welche Statt finden können, wenn man im gleichschenkeligen Dreyecke aus den gegebenen Stücken die übrigen berechnen soll.

Auflösung. Da unter den gegebenen Stükken wenigstens eine Seite seyn muß, und in dem gleichschenkeligen Dreyecke aus einem gegebenen Winkel die zwey andern leicht gefunden werden können, so sind nur folgende drey Fälle möglich:

I. Aus der Grundlinie und einem der gleichen Schenkel die Winkel zu finden.

II. Aus der Grundlinie und den Winkeln die gleichen Schenkel zu finden.

III. Aus den gleichen Schenkeln und den Winkeln die Grundlinie zu finden.

Es sey BAC (Fig. 159.) das gegebene Dreyeck, worin BA = AC, so entstehen folgende drey Fälle:

I. Fall.

Gegeben: AB = AC und BC;
Gesucht: W. BAC, und W. B = W. C.

II. Fall.

Gegeben: AB = AC, und W. BAC, oder AB = AC und W. B = W. C;
Gesucht: BC und W. B = W. C, oder BC und W. BAC.

III. Fall.

Gegeben: BC und W. BAC, oder BC und W. B = W. C;
Gesucht: AB = AC und W. B = W. C, oder AB = AC und W. BAC.

§. 407.

Aufgabe. Die Fälle, welche bey dem gleichschenkeligen Dreyecke eintreten können, aufzulösen.

Auflösung. Wenn man von der Spitze A ein Loth AD auf die Grundlinie BC zieht, so ist bekannt, daß sowohl letztere, als auch der Winkel an der Spitze, in zwey gleiche Theile getheilt wird. Auch entstehen in dem gleichschenkeligen Dreyecke die rechtwinkeligen congruenten Dreyecke ADB und ADC. Hieraus ergiebt sich Folgendes:

Für den I. Fall.

Da BC gegeben ist, so ist auch BD = DC bekannt, und durch die Proportion AB : BD = Sehne W. 90° : Sehne W. BAD wird aus den bekannten drey ersten Gliedern der Winkel BAD gefunden. Dieser verdoppelt, ist der W. BAC, und letzterer von 180° abgezogen, giebt zum Reste die Summe der gleichen Winkel B und C, deren Hälfte also = W. B = W. C ist.

Für den II. Fall.

Wenn AB = AC, und W. BAC bekannt ist, so halbire man diesen Winkel, um W. BAD = W. CAD zu finden. Schließt man nun:

Sehne W. 90° : Sehne W. BAD = AB : BD,

so wird hieraus BD gefunden, welches, doppelt genommen, die zu findende Grundlinie BC giebt.

Wäre AB und W. B = W. C gegeben, so subtrahire man W. B von 90°, um W. BAD zu finden, und verfahre nun, wie vorhin.

Für den III. Fall.

Es sey BC und W. BAC bekannt, so halbire man beydes, um BD und W. BAD zu finden. Setzt man nun die Proportion:

Sehne W. BAD : Sehne W. 90° = BD : AB,

so wird AB als viertes Glied gefunden.

Wäre BC und W. B = W. C gegeben, so ziehe man W. B von 90° ab, um W. BAD zu erhalten, und verfahre nun wie vorhin.

§. 408.

Anmerkung. Es ist nöthig, daß der Schüler zu allen diesen Fällen mehrere Beyspiele berechne, welche hier, um nicht zu weitläufig zu werden, übergangen worden sind.

§. 409.

Anmerkung. Auch sieht man leicht, wie in dem gleichschenkeligen Dreyecke, aus den vorhin gegebenen Stücken, dessen Höhe und durch diese auch sein Inhalt berechnet werden kann. Diese Uebung ist den Anfängern sehr zu empfehlen.

C) Vom Dreyecke überhaupt.

§. 410.

Aufgabe. Die Fälle zu entwickeln, welche bey dem Dreyecke überhaupt möglich sind, um aus den gegebenen Stücken die fehlenden zu berechnen.

Auflösung. Da wenigstens eine Seite gegeben seyn muß, und bey zwey gegebenen Winkeln des

Dreyecks der dritte Winkel auch leicht bekannt ist, so entstehen folgende vier Fälle:

I. Aus einer Seite und den zwey Winkeln;

II. Aus zwey Seiten und einem Winkel, welcher der einen Seite gegenüberliegt;

III. Aus zwey Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel;

IV. Aus allen drey Seiten die fehlenden Stücke zu finden.

Diese vier Aufgaben sollen nun, der Ordnung nach, allgemein aufgelößt werden.

§. 411.

Aufgabe. Aus einer Seite und zwey Winkeln die fehlenden Stücke in dem Dreyecke zu finden.

Es sey (Fig. 160.) DEF das Dreyeck, worin, ausser EF, noch zwey Winkel gegeben sind. Man soll das Uebrige finden.

Auflösung. I. Da zwey Winkel gegeben sind, so wird der dritte gefunden, wenn man die Summe der gegebenen von 180° abzieht,

II. Um ED zu finden, schließe man:

Sehne W. D : Sehne W. F = EF : ED, woraus

$$ED = \frac{\text{Sehne W. F} \times EF}{\text{Sehne W. D}}$$ wird,

III. Desgleichen wird FD durch:

Sehne W. D : Sehne W. E = EF : FD die Seite FD gefunden, und $FD = \frac{\text{Sehne W. E} \times EF}{\text{Sehne W. D}}$.

§. 412.

Aufgabe. Aus zwey Seiten und einem Winkel, welcher der einen Seite gegenübersteht, die fehlenden Stücke im Dreyecke zu finden.

Es sey (Fig. 160.) DE, EF und W. D, oder DE, EF und W. F gegeben. Man sucht W. F, W. E und DF, oder W. D, W. E und DF.

Auflösung. I. Aus EF : ED = Sehne W. D : Sehne W. F, wird Sehne W. F

$$= \frac{ED \times \text{Sehne W. D}}{EF}.$$

II. W. E = 180° — (W. D + W. F.)

III. Auf ähnliche Weise wird aus DE, EF und W. F das noch Fehlende gefunden.

§. 413.

Aufgabe. Aus zwey Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke des Dreyecks durch Rechnung zu finden.

Es sey DEF (Fig. 160.) das gegebene Dreyeck, worin man aus DE, EF und W. E die übrigen Stücke berechnen soll.

Auflösung. I. Entweder ist der W. E ein spitzer, oder ein rechter, oder ein stumpfer Winkel. Der II. Fall ist oben bey den rechtwinkeligen Dreyecken aufgelößt worden.

Ist aber W. E (Fig. 161.) ein spitzer, so theilt das Loth DG das Dreyeck EDF in zwey rechtwinke-

lige Dreyecke DGE und DGF. In jenem kann man aus W. E den W. EDG, und aus diesem und der Hypotenuse ED die Linie EG leicht finden. Diese von EF abgezogen, läßt GF übrig. Da aber auch in dem Dreyecke DGE das Loth DG auf doppelte Weise berechnet werden kann, so sind in dem Dreyecke DGF die zwey Catheten DG und GF bekannt, woraus man sowohl die Linie DF, als auch den W. F berechnen kann. Aus den Winkeln E und F findet man sodann noch den W. EDF.

III. Wenn W. DEF (Fig. 162.) ein stumpfer ist, so fällt das Loth DG auf die über E verlängerte FE, und man kann in dem rechtwinkeligen Dreyecke DGE aus DE und W. DEG (der durch seinen Nebenwinkel DEF bekannt ist) sowohl DG als GE berechnen. Wird GE zu EF addirt, so kennt man in dem rechtwinkeligen Dreyecke DGF die Catheten DG und GF, woraus man sowohl den W. F als auch DF berechnen kann. Aus W. DGF und W. F findet man endlich noch W. EDF.

§. 414.

Aufgabe. Aus drey gegebenen Seiten eines Dreyecks, die demselben zugehörigen Winkel zu berechnen.

Es sey (Fig. 163.) ABC das gegebene Dreyeck und AB, BC und CA die gegebenen Größen. Man soll die Winkel A, B und C finden.

Auflösung. I. Das gegebene Dreyeck ist entweder gleichseitig, gleichschenkelig oder ungleichseitig.

Im ersten Falle ist jeder Winkel = 60°. Im zweyten werden die Winkel nach §. 407 berechnet.

II. Im dritten Falle werde mit der kleinsten Seite AB aus A der Kreis FBDEF beschrieben und CA bis F verlängert, auch FB und ED nebst dem Lothe AG gezogen, so ist, da W. EDG + W. EDB = 180° = W. EDB + W. BFE, auch W. EDC = W. BFE. Folglich sind die Dreyecke EDC und BFC ähnlich und BC : FC = EC : DC.

III. Da nun BC, FC = BA + AC und EC = AC—AB drey bekannte Größen sind, so wird DC durch Rechnung gefunden. Da BC — DC = BD und BG = $\frac{1}{2}$BD, so ist auch sowohl BG als GC bekannt.

IV. Nun kann man im rechtwinkeligen Dreyecke AGB aus BA und BG den W. ABG, und im rechtwinkeligen Dreyecke AGC aus CA und CG den W. C leicht finden. Sind aber diese beyde Winkel bekannt, so ist es auch der W. BAC.

§. 415.

Anmerkung. Es wird wiederholt erinnert, daß es durchaus nothwendig ist, alle diese Fälle durch mehrere Beyspiele zu erläutern, um den Schüler nicht nur theoretisch, sondern auch practisch zu üben.

V. Einige andere Anwendungen dieser Lehre.

§. 416.

Erklärung. Aus der praktischen Geometrie ist bekannt, wie man im Stande ist, mancherley Ent-

fernungen zu bestimmen, wenn die nöthigen Linien und Winkel gemessen werden können. Zu diesen Auflösungen gehört nun meist die wirkliche Construction solcher Figuren im Kleinen, welche jenen auf dem Felde ähnlich sind. Dabey sind aber, besonders wegen des Auftragens der Winkel, kleinere oder größere Fehler unvermeidlich. Diese werden durch die seither entwickelte trigonometrische Rechnungsmethode gänzlich vermieden, indem man das Aufzeichnen erspart, und das Gesuchte sogleich berechnen kann. Es wird demnach Anfängern leicht seyn, die oben (§. 331 u. f.) vorgetragenen Aufgaben auch auf diese Weise zu lösen, eine Uebung, welche von großem Nutzen ist.

Um dieses wenigstens durch einen Fall zu erläutern, wählen wir folgende Aufgabe:

§. 417.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Gegenstände zu berechnen, zu deren keinem unmittelbar gemessen werden kann.

Es sey (Fig. 164.) AB die zu messende Linie.

Auflösung. I. Man nehme die Standlinie CD, messe sie, visire aus C nach A, B und D, und aus D nach B, A und C, und bemerke sich die Größe der Winkel o, u, y und x.

II. Aus CD, W. u und W. (x + y) berechne man BD; aus W. x, W. (o + u) und CD finde man AD. Endlich berechne man aus AD, BD und W. y die zu findende AB.

Beyspiele. Es sey CD = 90′, W. o = 80° 15′ W. u = 29° 30′, W. x = 27° 45° und W. y = 85° 30°. Wie groß ist AB?

1. Um BD zu finden, schließe man:

Sehne W. CBD : Sehne W. u = CD : BD d. h.
Sehne W. 37° 15′ : Sehne W. 29° 30′ = 90′ : BD,

$$\text{also } BD = \frac{49242 \times 90}{60529} = 73'\ 2''.$$

2. Um AD zu berechnen, setze man:

Sehne W. CAD : Sehne W. ACD = CD : AD d. h.
Sehne W. 42° 30′ : Sehne W. 109° 45′ = 90′ : AD

$$\text{folglich } AD = \frac{\text{Sehne W. } 109^\circ\ 45' \times 90'}{\text{Sehne W. } 42^\circ\ 30'}.$$

Da nun zwey Winkel, welche zusammengenommen 180° betragen, einerley Sehne haben, so ist Sehne W. 109° 45′ = Sehne W. 70° 15′, und es wird

$$AD = \frac{94118 \times 90'}{67559} = 125'\ 3'''.$$

3. Nun denke man sich das Loth BE von B auf AD, so ist

Sehne W. BED : Sehne W. y = BD : BE;

$$\text{folglich } BE = \frac{\text{Sehne W. } 38^\circ\ 30' \times 73'\ 2'}{\text{Sehne W. } 90^\circ} = \frac{99692 \times 732''}{100000} = 729'' = 72'\ 9''.$$

Ferner wird Sehne W. BED : Sehne W. EBD = BD : DE, folglich

$$DE = \frac{\text{Sehne W. } 4^\circ\ 30' \times 73'\ 2'}{100000} = \frac{7846 \times 732''}{100000} = 57'' = 5'\ 7''.$$

Daher ist AE = 125′ 3″ − 5′ 7″ = 119′ 6″.

Endlich findet man $AB = \sqrt{(AE^2 + EB^2)} = \sqrt{(1196^2 + 729^2)} = \sqrt{1961857} = 1400'' = 140'$.

§. 418.

Anmerkung. Auch diese Fälle müssen von den Schülern in mehreren Beyspielen durchgerechnet werden; denn sie befestigen die Theorie und bilden die practische Gewandheit.

§. 419.

Aufgabe. Die Größe eines auf dem Papiere gegebenen Winkels durch Hülfe der Sehnentafel zu messen.

Es sey (Fig. 154.) ABD der zu messende Winkel.

Auflösung. I. Wenn der gegebene Winkel ein spitzer ist, wie z. B. ABD, so nehme man zwischen seinen Schenkeln den willkührlichen Punct C, beschreibe aus ihm mit CB einen Kreis, der sie in E und F schneidet, ziehe die Sehne EF und messe sowohl den Durchmesser BG, als auch diese Sehne EF mit einerley Maaße.

II. Durch die Proportion BG : EF = 100000 : x findet man für x die dem W. ABD zugehörige Sehne nach 100000 Theilchen des Durchmessers, und folglich auch durch die Sehnentafel die Größe des ihr zugehörigen Winkels ABD.

III. Wäre der zu messende Winkel ein stumpfer, so construire man seinen Nebenwinkel, der ein spitzer

ist. Da nun die Größe dieses spitzen Winkels nach dem Vorigen leicht gefunden wird, so ist auch das Maaß des gegebenen stumpfen Winkels bekannt.

Beyspiel. Zu I. Es sey BG = 36′ und EF = 25′, so setze man: 36 : 25 = 100000 : Sehne W. ABD; folglich Sehne W. ABD $= \frac{2500000}{36} =$ 69444. Dieses Maaß in der Tafel aufgesucht, giebt W. ABD = 44°.

Zu II. Hätte man nach dem vorigen Verfahren den spitzen Nebenwinkel = 44° gefunden, so wäre der gegebene stumpfe Winkel = 180° — 44° = 136°.

§. 420.

Aufgabe. Vermittelst der Sehnentafel einen Winkel von gegebener Größe auf dem Papiere zu construiren.

Da dieser Winkel ein spitzer oder ein stumpfer seyn kann, so soll man z. B. den Winkel von 49° 15 und den Winkel von 112° 30′ construiren.

Auflösung. I. Wenn an dem Endpuncte B (Fig. 154.) der geraden AB ein Winkel von 49° 15′ gelegt werden soll, so beschreibe man mit einem aus B nach der Seite des zu bildenden Winkels hingezogenen, willkührlich angenommenen, aber gemessenen Halbmesser BC aus C den Kreis BEGB.

II. Nun schließe man:

Sehne W. 90° : Sehne W. 49° 15′ = 2 BC : x. Dies leicht zu berechnende x giebt die Größe von EF nach dem Maaße, worin BC gemessen wurde. Beschreibt man nun mit dieser EF aus E einen Bogen, welcher den Kreis in F schneidet, und zieht die gerade BFD, so ist ABD = 49° 15′.

III. Um den stumpfen Winkel von 112° 30′ zu construiren, zeichne man nach dem Vorigen seinen Nebenwinkel von 67° 30′, wodurch der stumpfe Winkel leicht construirt wird.

Beyspiele. Zu I. Da Sehne W. 49° 30′ = 76041 ist, so wird, wenn BC = 20′ wäre, die Proportion diese: 100000 : 76041 = 40 : x, und

$$x = \frac{76041 \times 40}{100000} = \frac{3041640}{100000} = 30' \; 4''.$$

Man müßte daher aus E mit dem Halbmesser von 30′ 4″ einen Bogen beschreiben, der den Kreis in F schneidet, und nun BF ziehen.

Zu II. Für W. 112° 30′ wird die Sehne seines Nebenwinkels = 92388 und die Proportion folgende: 100000 : 92388 = 40 : x, woraus $x = \frac{92388 \times 40}{100000}$ $= \frac{3695520}{100000} = 36' \; 9''$ wird. Diese Sehne bestimmt die Construction des Winkels von 67° 30′, folglich auch jene des Winkels von 112° 30°.

VI. Berechnung der Dreyecksebene aus ihren gegebenen drey Seiten.

§. 421.

Aufgabe. In ein gegebenes Dreyeck einen Kreis zu beschreiben, der jede Seite desselben berührt.

Es sey (Fig. 165.) ABC das gegebene Dreyeck, in welches der Kreis construirt werden soll.

Auflösung. Man halbire zwey beliebige Winkel des Dreyecks durch zwey gerade Linien, welche sich in demselben durchschneiden müssen, und fälle von diesem Durchschnittspuncte auf jede Dreyecksseite ein Loth, so ist jedes von ihnen der Halbmesser und ihr Vereinigungspunct der Mittelpunct des zu beschreibenden Kreises.

Beweis. Wenn z. B. der W. ABC und W. ACB durch BO und CO halbirt, und aus O die Lothe OP, OQ und OR gezogen worden sind, so sind die Dreyecke OPC und OQC, auch OPB und ORB congruent, folglich OP = OQ = OR.

§. 422.

Zusatz. Wird nun AO gezogen, so ist auch das Dreyeck AOR dem Dr. AOQ congruent, und W. OAR = W. OAQ. Daher ist dieser Satz erwiesen: Wenn man in einem Dreyecke alle drey Winkel durch drey gerade Linien halbirt, so müssen sie sich innerhalb des Dreyecks in einem Puncte vereinigen.

er Buchbinder beliebe die Seite 229 und 230 abzuschneiden.

§. 423.

Anmerkung. Als Gegensatz bemerke man hier noch diesen: Wenn man die drey Seiten eines Dreyecks halbirt, aus diesen Puncten drey Lothe errichtet, und in der Dreyecksebene verlängert, so müssen sich auch diese in einem Puncte durchschneiden, welcher von jeder der drey Winkelspitzen des Dreyecks gleiche Entfernung hat, und mit dieser Entfernung kann ein Kreis um das Dreyeck beschrieben werden.

§. 424.

Zusatz. Daher ist jedes Dreyeck einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie der halbe Umfang des Dreyecks dessen Höhe der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises ist.

Dreyeck $ABC = (AR + BP + CQ) \times OP$.

§. 425.

Zusatz. I. Man verlängere CO über O, fälle aus B das Loth BM darauf, verlängere es über M, bis die über O verlängerte PO dasselbe in N schneidet, so ist das Dr. BMO dem Dr. ARO ähnlich. Denn da die drey Winkel des Dreyecks ABC zwey rechte betragen, so ist auch W. OAR + W. OBP + OCQ einem rechten gleich. Aber W. MBO + BOM = W. MBO + W. OBP + W. OCQ, folglich ist W. OAR = W. MBO. Daher hat man $BM : MO = AR : RO = AR : OP$.

II. Auch sind die Dreyecke BMC, BPN und OMN ähnlich, und es ist $BM : MO = BC : ON$. Da

aber (nach I.) $BM : MO = AR : OP$, so hat $BC : ON = AR : OP$, folglich auch $BC \times OP = ON \times AR$. Zu beyden Producten $AR \times OP$ addirt giebt: $(AR + BC) \times OP = PN \times AR$, oder auch $(AR + BP + CQ) \times OP = PN \times AR$. Multiplicirt man nun beyderseits durch OP, so ist $(AR + BP + CQ) \times OP^2 = PN \times AR \times OP$.

III. Da nun auch die Dreyecke BPN und OPC ähnlich sind, so ist $PN : PB = PC : PO$, folglich $PN \times PO = PB \times PC = PB \times CQ$ und es wird (nach II.):

$$(AR + BP + CQ) \times OP^2 = AR \times BP \times CQ.$$

IV. Dieser Ausdruck (im III.) läßt sich in folgendem allgemeinen Satze darstellen: In jedem Dreyecke ist das Product aus seinem halben Umfange in das Quadrat des Halbmessers des eingeschriebenen Kreises dem Producte aus den drey halben Dreyecksseiten gleich.

§. 426.

Aufgabe. Einen allgemeinen Ausdruck für die Berechnung der Dreyecksebene aus ihren drey gegebenen Seiten zu finden.

Auflösung. I. Wenn man die Summe der drey Seiten $= s$, den Halbmesser des in das Dreyeck beschriebenen Kreises $= r$, und die drey Seiten $= a$, b und c setzt, so ist (nach §. IV.) $\frac{1}{2} s \times r^2 = (\frac{1}{2} s - a) \times (\frac{1}{2} s - b) \times (\frac{1}{2} s - c)$. Beydes mit $\frac{1}{2} s$ multiplicirt, giebt $\frac{1}{4} s^2 \times r^2 = \frac{1}{2} s \times$

$(\frac{1}{2}\, s - a) \times (\frac{1}{2}\, s - b) \times (\frac{1}{2}\, s - c)$, und auf beyden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen, $\frac{1}{2}\, s \times r = \sqrt{\frac{1}{2}\, s \times (\frac{1}{2}\, s - a) \times (\frac{1}{2}\, s - b) \times (\frac{1}{2}\, s - c)}$.

Da nun $\frac{1}{2}\, s \times r$ den Inhalt des Dreyecks ABC ausdrückt, so ist

$$\triangle\, ABC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\, s \times (\frac{1}{2}\, s - a) \times (\frac{1}{2}\, s - b) \times (\frac{1}{2}\, (s - c)\right)}$$

II. Dies giebt folgende allgemeine Regel: **Um den Inhalt eines Dreyecks zu finden, ziehe man die Quadratwurzel aus einem Producte, dessen vier Factoren die halbe Summe aller Seiten, die halbe Summe weniger der ersten, die halbe Summe weniger der zweyten, und die halbe Summe weniger der dritten Seite sind.**

Beyspiel. Es sey $a = 12'$, $b = 8'$ und $c = 10'$, so ist des Dreyecks Inhalt $= \sqrt{(30/2 \times 30/2 - 12 \times 30/2 - 8 \times 30/2 - 10)}$ $= \sqrt{15 \times 3 \times 7 \times 5} = \sqrt{1575} = 39$ Quadratfuß 68 □ Zolle.

Dergleichen Beyspiele muß der Schüler mehrfach berechnen.

§. 427.

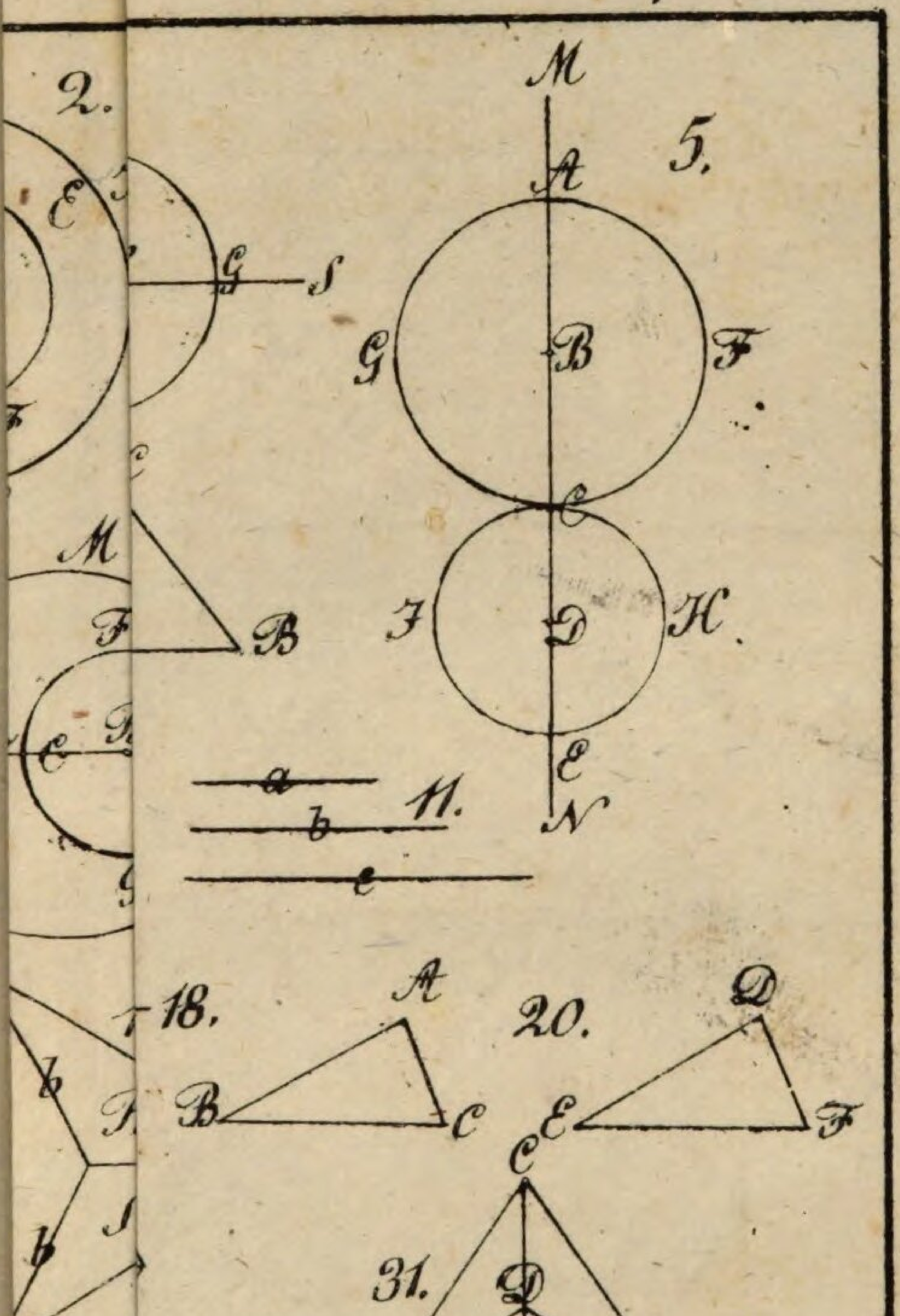
Zusatz. Wenn das zu berechnende Dreyeck gleichschenkelig oder gleichseitig ist, so wird die Auflösung noch einfacher, wovon die Schüler sich durch Beyspiele überzeugen müssen.

§. 428.

Anmerkung. Die Wichtigkeit dieser Aufgabe für die practische Geometrie muß Jedem einleuchten, und der Lehrer wird dieses durch mancherley Beyspiele erläutern. Mehrere Beweise darüber findet er in meiner Abhandlung: „Die Berechnung der Dreyecksebene aus ihren „gegebenen drey Seiten, u. s. w. Frankfurt a. M. „1813, b. Jäger.“ 24 S. 4, nebst 1 Steintafel.

Mainz,
gedruckt bey F. Kupferberg, große Bleiche, Lit. D. No. 335.

Tafel I.

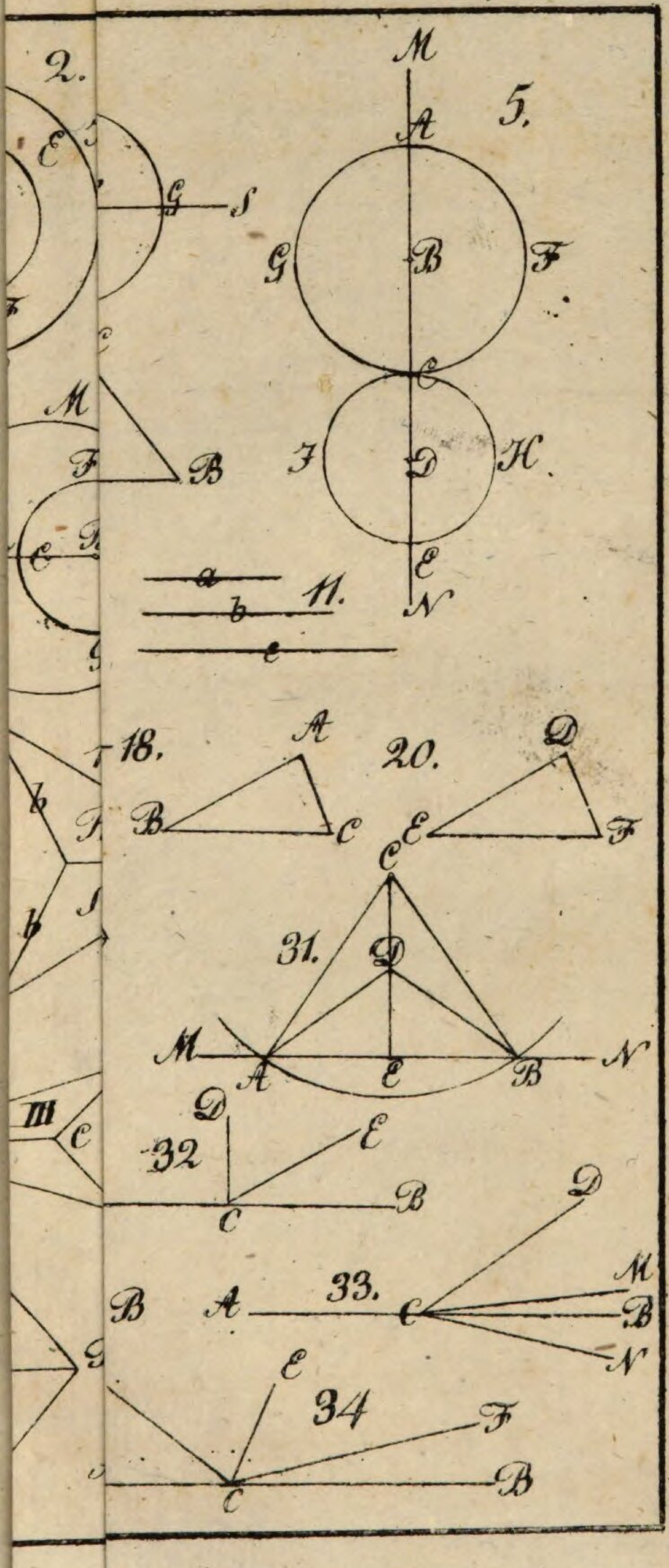


§. 428.

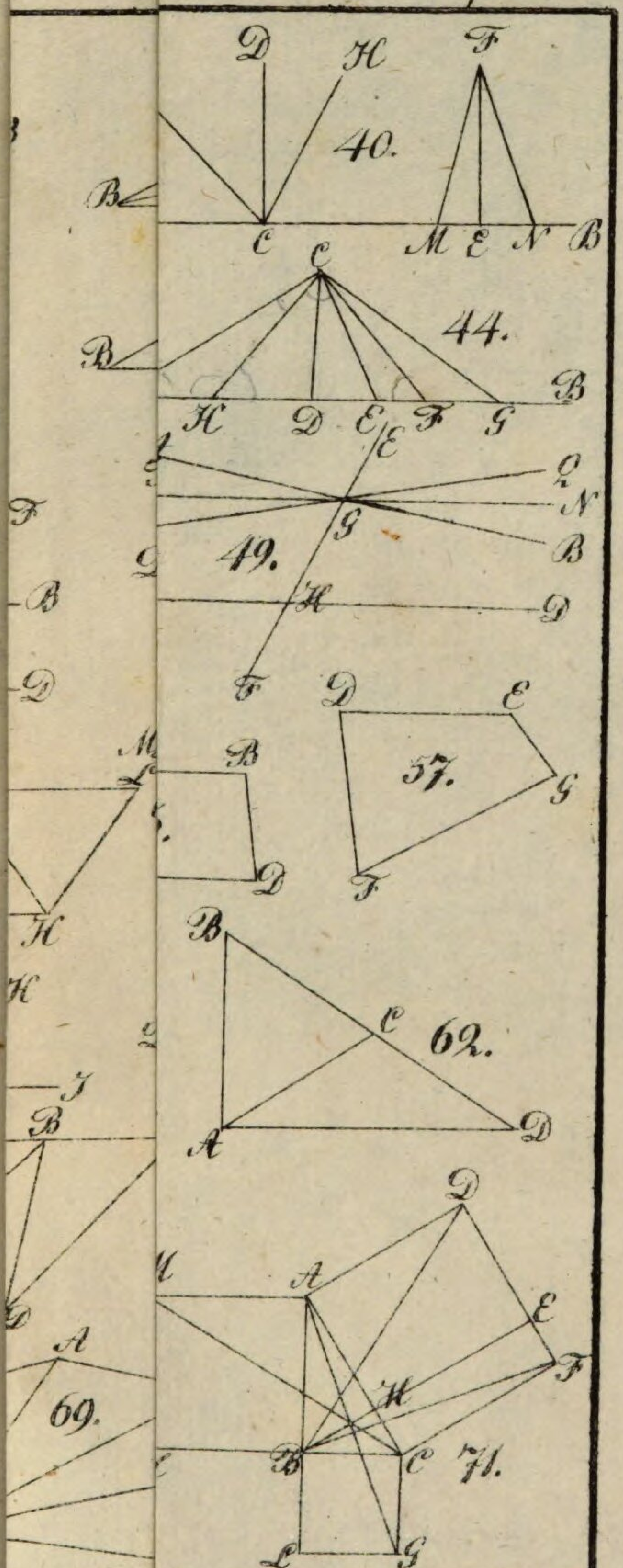
Anmerkung. Die Wichtigkeit dieser Aufgabe für die practische Geometrie muß Jedem einleuchten, und der Lehrer wird dieses durch mancherley Beyspiele erläutern. Mehrere Beweise darüber findet er in meiner Abhandlung: „Die Berechnung der Dreyecksebene aus ihren „gegebenen drey Seiten, u. s. w. Frankfurt a. M. „1813, b. Jäger.“ 24 S. 4, nebst 1 Steintafel.

Mainz,
gedruckt bey F. Kupferberg, große Bleiche, Lit. D. No. 335.

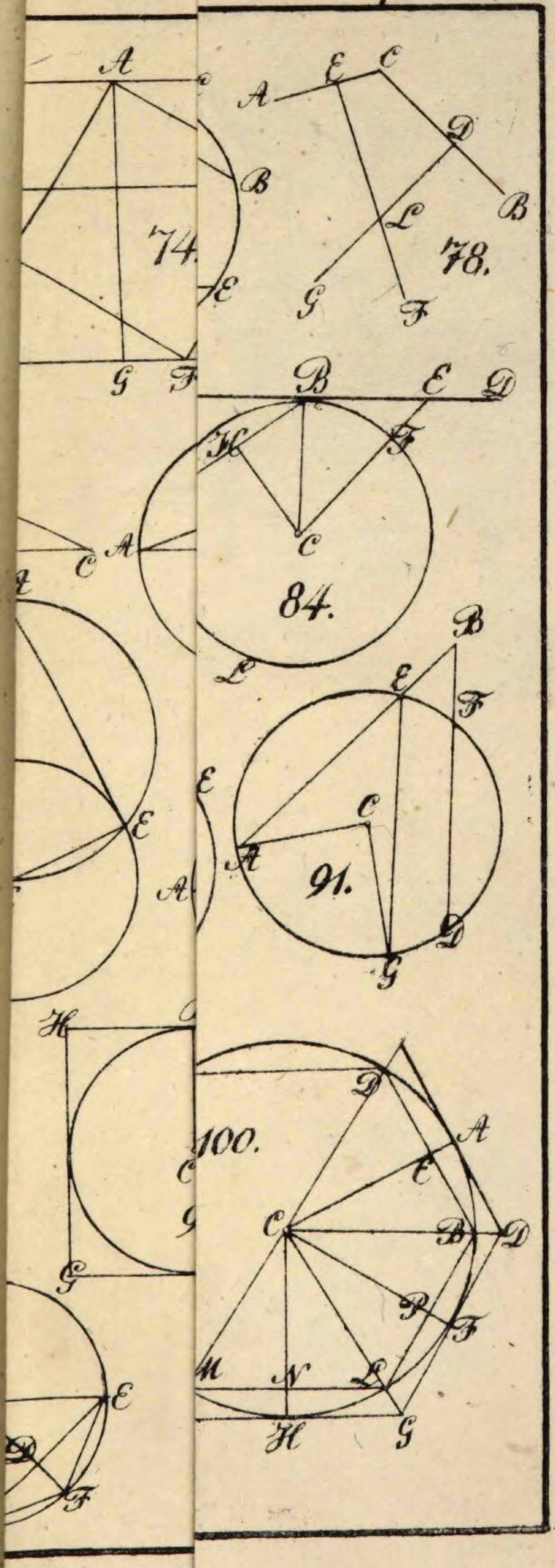
Tafel I.



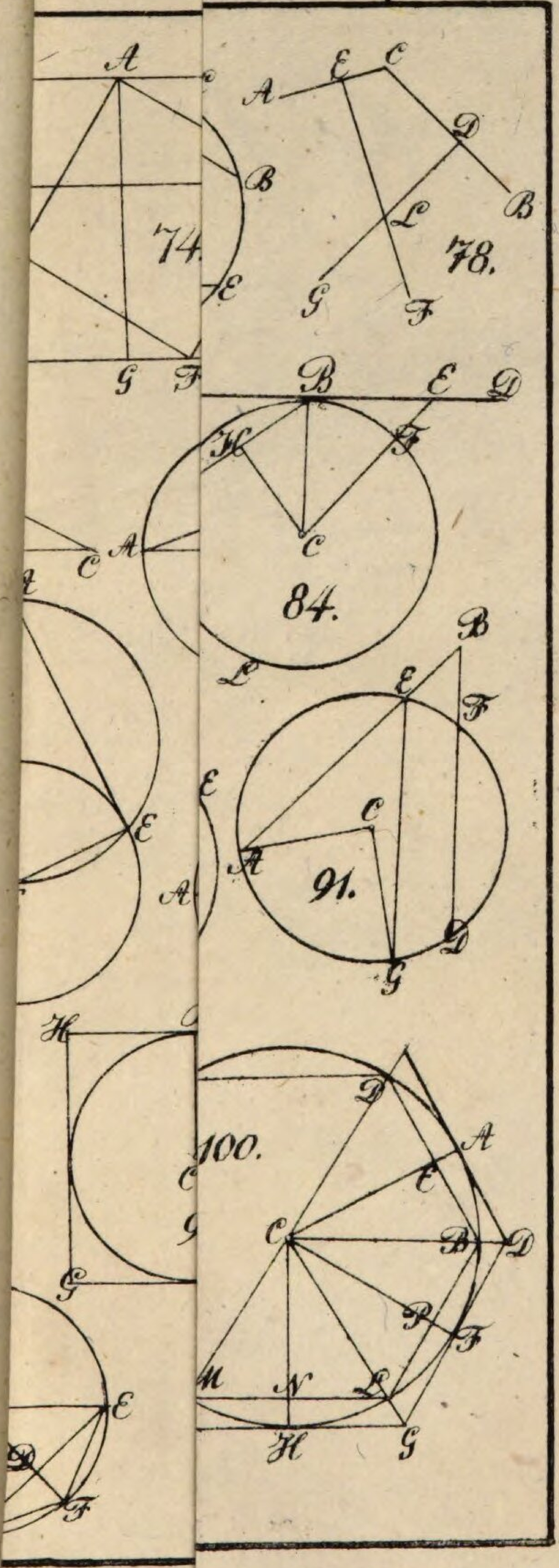
Tafel II.



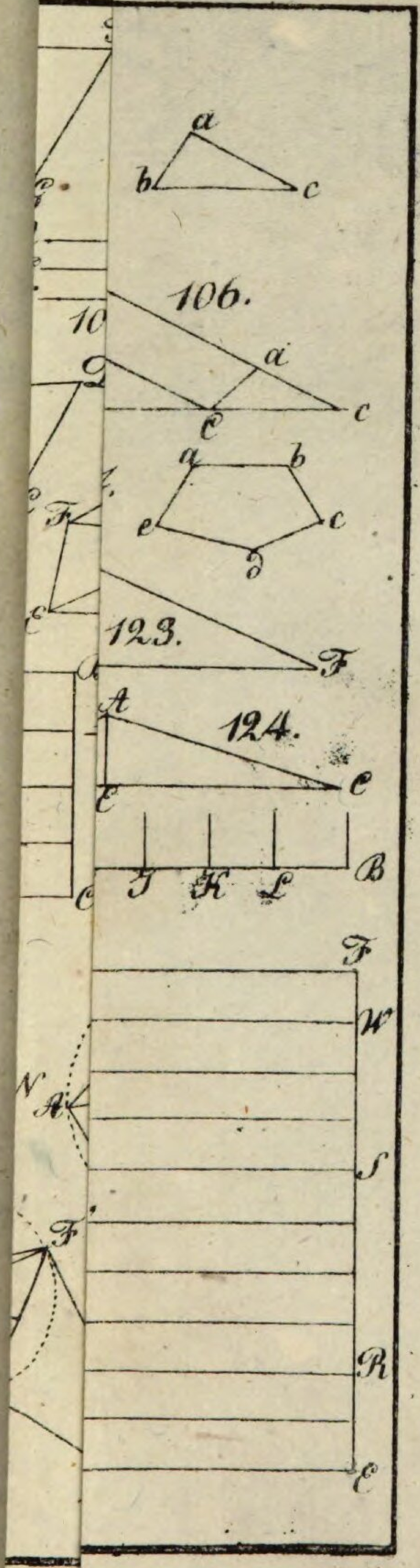
Tafel III.



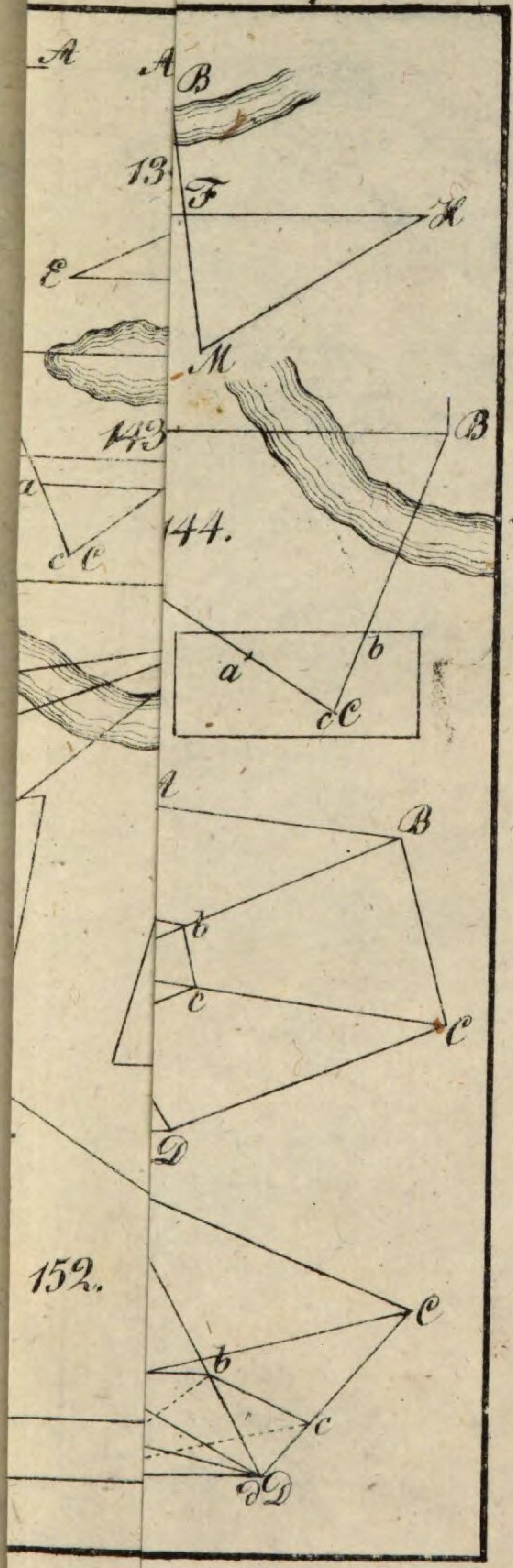
Tafel III.



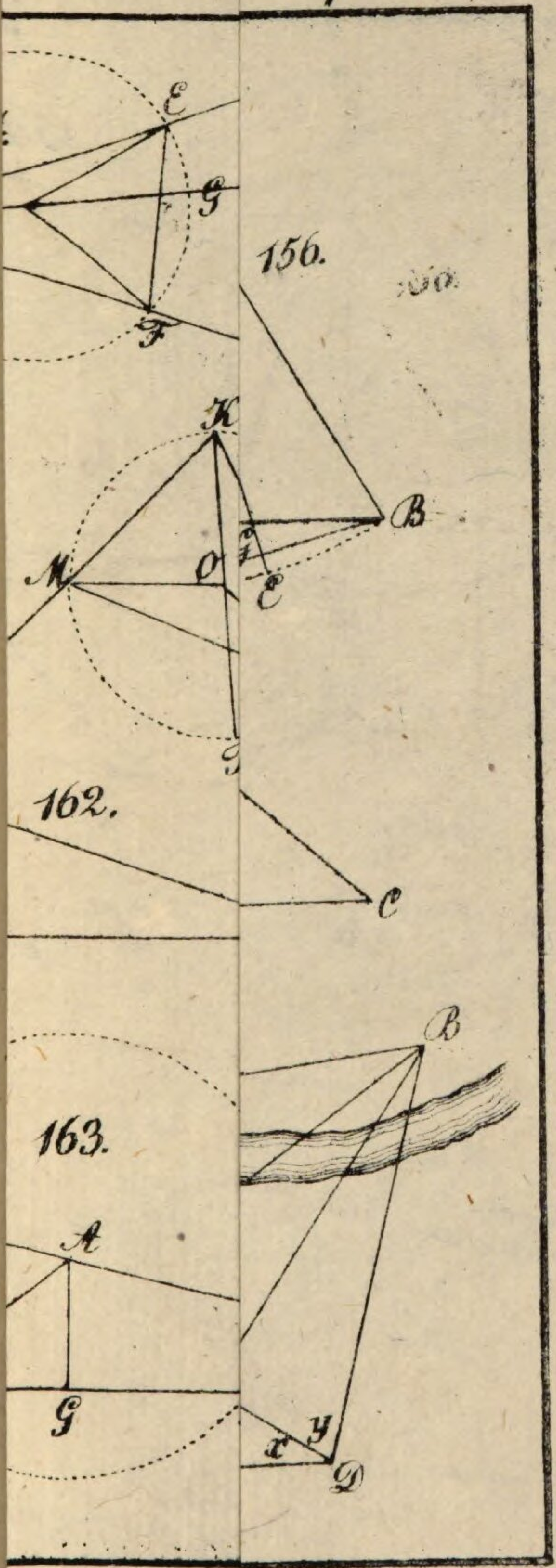
Tafel IV.



Tafel V.



Tafel VI.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Geometrische Wissenschaftslehre eine Anleitung zum leichten und grü
ndlichen Studium der Geometrie

Mainz 1819

Math.p. 224 s
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082055-1